



Correction – Suites arithmétiques

Partie 1 : Reconnaître une suite arithmétique et déterminer sa raison

Exercice 1 – Reconnaître une suite arithmétique

Correction

Une suite est arithmétique lorsque l'on ajoute toujours le même nombre pour passer d'un terme au suivant.

a)

$$7 - 4 = 3, \quad 10 - 7 = 3, \quad 13 - 10 = 3.$$

La différence est toujours la même.

Suite arithmétique de raison $r = 3$.

b)

$$4 - 2 = 2$$

mais :

$$8 - 4 = 4.$$

Les différences ne sont pas constantes.

La suite n'est pas arithmétique.

c)

$$11 - 15 = -4, \quad 7 - 11 = -4, \quad 3 - 7 = -4.$$

Donc :

Suite arithmétique de raison $r = -4$.

Exercice 2 – Calculer une raison

Correction

Pour deux termes consécutifs :

$$r = u_{n+1} - u_n.$$

a)

$$r = u_5 - u_4 = 17 - 12 = 5.$$

$$r = 5$$

b)

$$r = u_{11} - u_{10} = -1 - 3 = -4.$$

$$r = -4$$

c)

$$r = u_8 - u_7 = -2 - (-6) = 4.$$

$$r = 4$$

Exercice 3 – Compléter une suite arithmétique

Correction

1) Raison 4

On ajoute 4 à chaque étape :

$$3; 7; 11; 15; 19.$$

2) Raison -3

On retire 3 à chaque étape :

$$14; 11; 8; 5; 2.$$

3) Raison 5

On ajoute 5 :

$$-8; -3; 2; 7; 12.$$

Exercice 4 – Utiliser la relation de récurrence

Correction

On a :

$$u_0 = -4 \quad \text{et} \quad r = 6.$$

La relation de récurrence est :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + 6}.$$

Puis :

$$u_1 = -4 + 6 = 2,$$

$$u_2 = 2 + 6 = 8,$$

$$u_3 = 8 + 6 = 14,$$

$$u_4 = 14 + 6 = 20.$$

Ainsi :

$$\boxed{u_1 = 2, \quad u_2 = 8, \quad u_3 = 14, \quad u_4 = 20.}$$

Exercice 5 – Température d'une enceinte expérimentale

Correction

La température de départ vaut :

$$\boxed{T_0 = 8}.$$

Toutes les 10 minutes, la température programmée augmente de 2°C .

La suite est donc arithmétique de raison :

$$\boxed{r = 2}.$$

La relation de récurrence est :

$$\boxed{T_{n+1} = T_n + 2}.$$

Après 4 périodes de 10 minutes :

$$T_4 = 8 + 4 \times 2 = 16.$$

Donc :

$$\boxed{T_4 = 16^\circ\text{C}.}$$

Cela signifie qu'après 40 minutes, la température programmée est de 16°C .

Partie 2 : Calculer directement un terme

Exercice 6 – Utiliser $u_n = u_0 + nr$

Correction

On sait que :

$$u_0 = 7 \quad \text{et} \quad r = 5.$$

Donc :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Ainsi :

$$u_n = 7 + 5n.$$

Pour $n = 10$:

$$u_{10} = 7 + 5 \times 10 = 57.$$

$$u_{10} = 57$$

Pour $n = 25$:

$$u_{25} = 7 + 5 \times 25 = 132.$$

$$u_{25} = 132$$

Exercice 7 – Une raison négative

Correction

$$u_0 = 20, \quad r = -3.$$

Donc :

$$u_n = 20 - 3n.$$

$$u_n = 20 - 3n$$

Pour $n = 8$:

$$u_8 = 20 - 3 \times 8 = 20 - 24 = -4.$$

$$u_8 = -4$$

On cherche maintenant :

$$u_n = -10.$$

Donc :

$$20 - 3n = -10.$$

$$-3n = -30.$$

Ainsi :

$$n = 10.$$

Exercice 8 – Partir d'un terme quelconque

Correction

On sait que :

$$u_6 = 11 \quad \text{et} \quad r = 4.$$

On utilise :

$$u_n = u_6 + (n - 6)r.$$

Pour $n = 10$:

$$u_{10} = 11 + (10 - 6) \times 4.$$

$$u_{10} = 11 + 16 = 27.$$

$$\boxed{u_{10} = 27}$$

Pour $n = 20$:

$$u_{20} = 11 + (20 - 6) \times 4$$

$$= 11 + 56 = 67.$$

$$\boxed{u_{20} = 67}$$

Pour tout n :

$$u_n = 11 + 4(n - 6).$$

Donc :

$$u_n = 11 + 4n - 24.$$

Ainsi :

$$\boxed{u_n = 4n - 13}.$$

Enfin :

$$u_0 = -13.$$

$$\boxed{u_0 = -13}$$

Exercice 9 – Retrouver la raison

Correction

On sait que :

$$u_3 = 8 \quad \text{et} \quad u_9 = 32.$$

Entre les indices 3 et 9, il y a :

$$9 - 3 = 6$$

écarts.

On utilise :

$$u_9 = u_3 + 6r.$$

Donc :

$$32 = 8 + 6r.$$

$$24 = 6r.$$

Ainsi :

$$\boxed{r = 4}.$$

On revient de u_3 à u_0 :

$$u_3 = u_0 + 3r.$$

Donc :

$$8 = u_0 + 12.$$

Ainsi :

$$\boxed{u_0 = -4}.$$

Finalement :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Donc :

$$\boxed{u_n = -4 + 4n}.$$

Exercice 10 – Premier terme, dernier terme et nombre de termes

Correction

La première suite comporte 12 termes.

Il y a donc :

$$12 - 1 = 11$$

écarts entre le premier et le dernier terme.

Le premier terme vaut 5 et :

$$r = 4.$$

Le dernier terme vaut donc :

$$5 + 11 \times 4.$$

Ainsi :

$$\boxed{49}.$$

Pour la deuxième suite, il y a 9 termes, donc :

$$9 - 1 = 8$$

écarts.

Le dernier terme vaut 30 et :

$$r = 3.$$

Si p désigne le premier terme :

$$30 = p + 8 \times 3.$$

Donc :

$$30 = p + 24.$$

Ainsi :

$$\boxed{p = 6}.$$

Exercice 11 – Épargne régulière

Correction

Au départ :

$$\boxed{u_0 = 300}.$$

Chaque mois, on ajoute exactement 40 €.

La suite est donc arithmétique de raison :

$$\boxed{r = 40}.$$

Ainsi :

$$u_n = 300 + 40n.$$

$$\boxed{u_n = 300 + 40n}$$

Après 12 versements :

$$u_{12} = 300 + 40 \times 12.$$

$$u_{12} = 300 + 480 = 780.$$

Donc :

$$\boxed{u_{12} = 780 \text{ €}}.$$

On cherche maintenant :

$$300 + 40n = 900.$$

$$40n = 600.$$

Donc :

$$\boxed{n = 15}.$$

Il faut donc 15 versements mensuels.

Partie 3 : Sens de variation

Exercice 12 – Utiliser le signe de la raison

Correction

Pour une suite arithmétique :

$$r > 0 \Rightarrow \text{suite strictement croissante,}$$

et :

$$r < 0 \Rightarrow \text{suite strictement décroissante.}$$

a)

$$r = 7 > 0.$$

Suite strictement croissante.

b)

$$r = -\frac{3}{2} < 0.$$

Suite strictement décroissante.

c)

$$r = 4 > 0.$$

Suite strictement croissante.

d)

$$r = -12 < 0.$$

Suite strictement décroissante.

Exercice 13 – Déterminer la variation à partir de la forme explicite

Correction

a)

$$u_n = 4n + 1.$$

Le coefficient de n est la raison :

$$r = 4.$$

Donc :

(u_n) est strictement croissante.

b)

$$v_n = 12 - 5n.$$

Donc :

$$r = -5.$$

Ainsi :

(v_n) est strictement décroissante.

c)

$$w_n = -2n - 7.$$

Donc :

$$r = -2.$$

Ainsi :

(w_n) est strictement décroissante.

Exercice 14 – Stock d'un entrepôt

Correction

Le stock initial est :

$$u_0 = 850.$$

Chaque jour, 25 pièces quittent l'entrepôt.

La raison est donc :

$$r = -25.$$

Comme :

$$r < 0,$$

la suite est strictement décroissante.

(u_n) est strictement décroissante.

Son expression est :

$$u_n = 850 - 25n.$$

$$u_n = 850 - 25n$$

Après 10 jours :

$$u_{10} = 850 - 25 \times 10.$$

$$u_{10} = 850 - 250 = 600.$$

$$u_{10} = 600$$

On cherche les valeurs de n telles que :

$$850 - 25n \geq 0.$$

Donc :

$$25n \leq 850.$$

$$n \leq 34.$$

Ainsi, le modèle fournit un stock positif ou nul jusqu'à :

$$34 \text{ jours}.$$

En effet :

$$u_{34} = 0.$$

Partie 4 : Représentation graphique

Exercice 15 – Construire une représentation

Correction

$$u_n = 2n + 3.$$

On calcule :

$$u_0 = 3,$$

$$u_1 = 5,$$

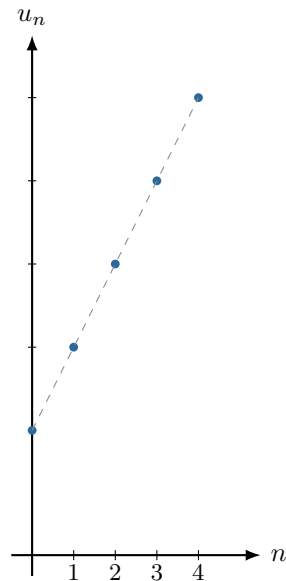
$$u_2 = 7,$$

$$u_3 = 9,$$

$$u_4 = 11.$$

Les points sont donc :

$$(0; 3), \quad (1; 5), \quad (2; 7), \quad (3; 9), \quad (4; 11).$$



Les points sont alignés car :

$$u_n = 2n + 3$$

est une expression affine de n .

On ne trace cependant pas la droite entière comme représentation de la suite : seuls les points d'abscisses entières correspondent à des termes.

Exercice 16 – Raison et coefficient directeur

Correction

On a :

$$u_0 = -2 \quad \text{et} \quad r = 3.$$

Donc :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Ainsi :

$$u_n = 3n - 2.$$

Les points $(n; u_n)$ sont situés sur la droite :

$$y = 3x - 2.$$

Le coefficient directeur de cette droite vaut :

$$3.$$

Il est égal à la raison de la suite :

$$\text{coefficient directeur} = r.$$

Exercice 17 – Lire un graphique

Correction

On lit :

$$u_0 = 2,$$

$$u_1 = 4,$$

et :

$$u_4 = 10.$$

La différence entre deux termes consécutifs est :

$$4 - 2 = 2.$$

Donc :

$$r = 2.$$

Comme :

$$u_0 = 2,$$

on obtient :

$$u_n = 2 + 2n.$$

Ainsi :

$$u_n = 2n + 2.$$

Comme :

$$r = 2 > 0,$$

la suite est :

strictement croissante.

Partie 5 : Somme des premiers entiers

Exercice 18 – Utiliser la formule fondamentale

Correction

On utilise :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour :

$$A = 1 + 2 + \cdots + 40,$$

on obtient :

$$A = \frac{40 \times 41}{2}.$$

Donc :

$$A = 20 \times 41 = 820.$$

$$\boxed{A = 820}$$

Pour :

$$B = 1 + 2 + \cdots + 75,$$

on obtient :

$$B = \frac{75 \times 76}{2}.$$

$$B = 75 \times 38.$$

Donc :

$$\boxed{B = 2850}.$$

Exercice 19 – Somme des nombres pairs

Correction

On cherche :

$$S = 2 + 4 + 6 + \cdots + 80.$$

Comme :

$$80 = 2 \times 40,$$

la somme contient les 40 premiers nombres pairs.

On factorise par 2 :

$$S = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 40).$$

Donc :

$$S = 2 \times \frac{40 \times 41}{2}.$$

Les 2 se simplifient :

$$S = 40 \times 41.$$

Ainsi :

$$\boxed{S = 1640}.$$

Exercice 20 – Empilement de boîtes

Correction

Le nombre total de boîtes est :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 20.$$

On utilise :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Donc :

$$S = \frac{20 \times 21}{2}.$$

$$S = 10 \times 21.$$

Ainsi :

$$\boxed{S = 210}.$$

Il faut donc :

$$\boxed{210 \text{ boîtes}}.$$

Partie 6 : Somme de termes consécutifs

Exercice 21 – Somme à partir de u_0

Correction

On a :

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad r = 3.$$

Le dernier terme demandé est :

$$u_{10} = 4 + 10 \times 3.$$

Donc :

$$\boxed{u_{10} = 34}.$$

De u_0 à u_{10} , il y a :

$$10 - 0 + 1 = 11$$

termes.

La formule de somme donne :

$$S = 11 \times \frac{4 + 34}{2}.$$

Ainsi :

$$S = 11 \times 19.$$

Donc :

$$\boxed{S = 209}.$$

Exercice 22 – Somme entre deux indices

Correction

On a :

$$u_5 = 8 \quad \text{et} \quad r = 4.$$

Entre les indices 5 et 15, il y a :

$$15 - 5 = 10$$

écarts.

Donc :

$$u_{15} = u_5 + 10r.$$

$$u_{15} = 8 + 10 \times 4.$$

Ainsi :

$$\boxed{u_{15} = 48}.$$

Le nombre de termes est :

$$15 - 5 + 1 = 11.$$

La somme vaut donc :

$$S = 11 \times \frac{8 + 48}{2}.$$

$$S = 11 \times 28.$$

Ainsi :

$$\boxed{S = 308}.$$

Exercice 23 – Prime annuelle progressive

Correction

La première prime vaut :

$$u_0 = 500.$$

Elle augmente de 50 € chaque année.

Donc :

$$\boxed{r = 50}.$$

La forme explicite est :

$$u_n = 500 + 50n.$$

$$\boxed{u_n = 500 + 50n}$$

La dixième année correspond à :

$$n = 9.$$

Donc :

$$u_9 = 500 + 50 \times 9.$$

$$u_9 = 500 + 450 = 950.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Prime de la 10e année} = 950 \text{ €}}.$$

Sur les dix premières années, il y a :

$$\boxed{10 \text{ primes}}.$$

La somme totale vaut :

$$S = 10 \times \frac{500 + 950}{2}.$$

$$S = 10 \times 725.$$

Donc :

$$\boxed{S = 7250 \text{ €}}.$$

Partie 7 : Exercice de synthèse type bac

Exercice 24 – Une salle de spectacle

Correction

La première rangée possède :

$$u_0 = 22.$$

Chaque rangée suivante comporte 3 sièges supplémentaires.

Partie A – Étude de la suite

La différence entre deux termes consécutifs est toujours 3.

Donc :

$$(u_n) \text{ est arithmétique de raison } r = 3.$$

La relation de récurrence est :

$$u_{n+1} = u_n + 3.$$

La forme explicite est :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Donc :

$$u_n = 22 + 3n.$$

Pour $n = 5$:

$$u_5 = 22 + 3 \times 5.$$

$$u_5 = 37.$$

Ainsi :

$$u_5 = 37.$$

Comme u_0 correspond à la première rangée, u_5 correspond à la sixième rangée.

La salle comporte 16 rangées.

La dernière rangée correspond donc à :

$$n = 15.$$

Ainsi :

$$u_{15} = 22 + 3 \times 15.$$

$$u_{15} = 22 + 45 = 67.$$

Donc :

$$\text{La dernière rangée comporte 67 sièges.}$$

Comme :

$$r = 3 > 0,$$

la suite est :

$$\text{strictement croissante.}$$

Partie B – Représentation

On calcule :

$$u_0 = 22,$$

$$u_1 = 25,$$

$$u_2 = 28,$$

$$u_3 = 31.$$

Les points sont donc :

$$(0; 22), \quad (1; 25), \quad (2; 28), \quad (3; 31).$$

Ils sont alignés car :

$$u_n = 22 + 3n$$

est une expression affine de n .

Ils appartiennent à la droite d'équation :

$$\boxed{y = 3x + 22}.$$

Partie C – Nombre total de sièges

La salle comporte 16 rangées.

On additionne donc :

$$16$$

termes.

Le premier terme vaut :

$$22$$

et le dernier :

$$67.$$

Ainsi :

$$S = 16 \times \frac{22 + 67}{2}.$$

Donc :

$$S = 16 \times \frac{89}{2}.$$

$$S = 8 \times 89.$$

Ainsi :

$$\boxed{S = 712}.$$

La salle comporte donc :

$$\boxed{712 \text{ sièges}}.$$

Partie 8 : Exercice de synthèse type bac

Exercice 25 – Plan d'épargne sans intérêts

Correction

Le premier mois :

$$u_0 = 80.$$

Chaque mois, le versement augmente de 10 €.

Partie A – Modélisation

La différence entre deux versements consécutifs est toujours 10.

Donc :

$$(u_n) \text{ est arithmétique.}$$

Sa raison vaut :

$$r = 10.$$

La relation de récurrence est :

$$u_{n+1} = u_n + 10.$$

La forme explicite est :

$$u_n = 80 + 10n.$$

$$u_n = 80 + 10n$$

Le douzième mois correspond à :

$$n = 11.$$

Ainsi :

$$u_{11} = 80 + 10 \times 11.$$

$$u_{11} = 190.$$

Donc :

$$12^{\text{e}} \text{ mois : } 190 \text{ €}.$$

Le vingt-quatrième mois correspond à :

$$n = 23.$$

Donc :

$$u_{23} = 80 + 10 \times 23.$$

$$u_{23} = 310.$$

Ainsi :

$$24^{\text{e}} \text{ mois : } 310 \text{ €}.$$

Comme :

$$r = 10 > 0,$$

la suite est :

$$\text{strictement croissante.}$$

Partie B – Objectif de versement

On cherche le premier n tel que :

$$u_n \geq 200.$$

Donc :

$$80 + 10n \geq 200.$$

$$10n \geq 120.$$

Ainsi :

$$n \geq 12.$$

Le premier indice possible est donc :

$$n = 12.$$

Mais u_{12} correspond au mois numéro :

$$12 + 1 = 13.$$

Ainsi :

Le versement atteint 200 € pour la première fois au 13e mois.

En effet :

$$u_{12} = 80 + 120 = 200.$$

Partie C – Somme versée

Sur 24 mois, il y a :

24 versements.

La somme est :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{23}.$$

Le premier terme vaut :

$$u_0 = 80$$

et le dernier :

$$u_{23} = 310.$$

La somme vaut donc :

$$S = 24 \times \frac{80 + 310}{2}.$$

$$S = 24 \times \frac{390}{2}.$$

$$S = 24 \times 195.$$

Donc :

$$S = 4680 \text{ €}.$$

Le modèle suppose volontairement qu'il n'y a ni intérêts ni rendement financier : on étudie uniquement la succession des montants versés chaque mois, qui forme exactement une suite arithmétique.

Fin de la correction
cestcompliquelesmaths.fr