



Cours : Suites arithmétiques

1) Définition d'une suite arithmétique

Définition

Une suite (u_n) est **arithmétique** lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre.

Il existe donc un réel r tel que :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre r est appelé la **raison** de la suite.

Propriété

La raison d'une suite arithmétique peut être obtenue en calculant la différence entre deux termes consécutifs :

$$r = u_{n+1} - u_n$$

Exemple

On considère une suite arithmétique de premier terme :

$$u_0 = -5$$

et de raison :

$$r = 3.$$

On ajoute donc 3 à chaque étape :

$$u_1 = u_0 + 3 = -5 + 3 = -2$$

$$u_2 = u_1 + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$u_3 = u_2 + 3 = 1 + 3 = 4.$$

Ainsi :

$$-5; -2; 1; 4; \dots$$

Remarque

La relation :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

est la **relation de récurrence** d'une suite arithmétique.
Elle permet de calculer un terme à partir du précédent.

Propriété

Si la raison vaut :

$$r = 0,$$

alors :

$$u_{n+1} = u_n.$$

Tous les termes sont donc égaux et la suite est **constante**.

2) Calculer directement un terme

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

Si l'on connaît un terme u_p , alors pour tout entier n :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

En particulier, si le premier terme est u_0 :

$$u_n = u_0 + nr$$

Propriété

Dans une suite arithmétique, si l'on connaît :

- le premier terme ;
- la raison r ;
- le nombre de termes ;

alors le dernier terme peut être calculé avec :

$$\text{dernier terme} = \text{premier terme} + (\text{nombre de termes} - 1) \times r$$

Réciproquement :

$$\text{premier terme} = \text{dernier terme} - (\text{nombre de termes} - 1) \times r$$

Exemple

Une suite arithmétique contient 8 termes.

Son premier terme vaut :

$$2$$

et sa raison vaut :

$$3.$$

Le dernier terme vaut donc :

$$2 + (8 - 1) \times 3.$$

Ainsi :

$$2 + 7 \times 3 = 2 + 21 = 23.$$

Donc :

$$\boxed{\text{dernier terme} = 23}$$

Remarque

Cette formule est exactement la même idée que :

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

Entre le premier terme et le dernier terme, il y a toujours :

$$\boxed{\text{nombre de termes} - 1}$$

écarts.

Remarque

La formule :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

est appelée la **forme explicite** d'une suite arithmétique.

Elle permet de calculer directement un terme, même d'indice élevé, sans calculer tous les termes précédents.

Méthode

Pour calculer directement u_n :

- 1- On repère un terme connu u_p .
- 2- On repère la raison r .
- 3- On utilise :

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

- 4- On remplace les valeurs et on calcule.

Exemple

On considère une suite arithmétique de premier terme :

$$u_0 = -5$$

et de raison :

$$r = 3.$$

Pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Donc :

$$u_n = -5 + 3n.$$

Ainsi :

$$u_n = 3n - 5.$$

Par exemple :

$$u_{20} = 3 \times 20 - 5 = 55.$$

Exemple

On considère une suite arithmétique telle que :

$$u_4 = 3$$

et de raison :

$$r = -2.$$

On utilise :

$$u_n = u_4 + (n - 4)r.$$

Donc :

$$u_n = 3 + (n - 4)(-2).$$

Ainsi :

$$u_n = 3 - 2n + 8$$

et finalement :

$$u_n = 11 - 2n.$$

Attention

Dans :

$$u_n = u_p + (n - p)r,$$

le nombre $n - p$ représente le **nombre de pas** entre les indices p et n .

Par exemple, pour passer de u_4 à u_{10} , on effectue :

$$10 - 4 = 6$$

étapes.

3) Sens de variation

Propriété

Le sens de variation d'une suite arithmétique dépend uniquement de sa raison r .

— Si

$$r > 0,$$

la suite est **strictement croissante**.

— Si

$$r < 0,$$

la suite est **strictement décroissante**.

— Si

$$r = 0,$$

la suite est **constante**.

Méthode

Pour déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique, il suffit donc de regarder le signe de sa raison.

Il n'est pas nécessaire de recalculer $u_{n+1} - u_n$, car :

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

Exemple

La suite arithmétique de raison :

$$r = 3$$

est strictement croissante car :

$$3 > 0.$$

Exemple

Une suite arithmétique de raison :

$$r = -6$$

est strictement décroissante car :

$$-6 < 0.$$

4) Représentation graphique

Propriété

Les points représentant une suite arithmétique ont pour coordonnées :

$$(n; u_n).$$

Ces points sont **alignés**.

Remarque

Si :

$$u_n = u_0 + nr,$$

alors les points de la suite appartiennent à la droite d'équation :

$$y = rx + u_0.$$

La raison r correspond donc au **coefficient directeur** de cette droite.

Attention

La représentation graphique d'une suite n'est pas une droite continue.

On représente seulement les points correspondant aux indices entiers :

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

On obtient donc des **points isolés alignés**.

Exemple

On considère :

$$u_n = 2n + 1.$$

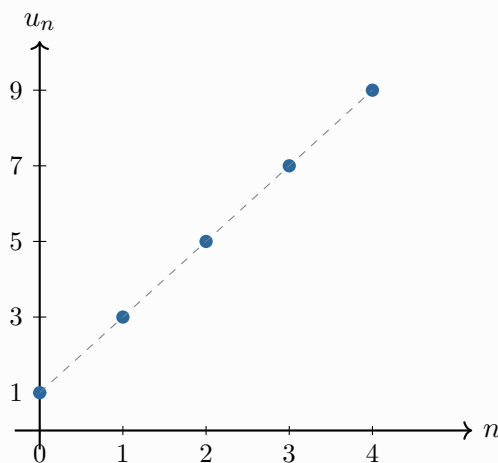
Les premiers termes sont :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 3, \quad u_2 = 5, \quad u_3 = 7, \quad u_4 = 9.$$

Les points :

$$(0; 1), \quad (1; 3), \quad (2; 5), \quad (3; 7), \quad (4; 9)$$

sont alignés.



La raison vaut :

$$r = 2.$$

C'est aussi le coefficient directeur de la droite sur laquelle sont situés les points.

5) Somme des premiers entiers

Propriété

Pour tout entier naturel non nul n :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

On peut aussi écrire :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Méthode

Pour utiliser cette formule :

- 1- On repère le dernier entier de la somme.
- 2- On remplace n dans :

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

- 3- On calcule.

Exemple

Calculons :

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 100.$$

On utilise :

$$S = \frac{100(100+1)}{2}.$$

Donc :

$$S = \frac{100 \times 101}{2}.$$

Ainsi :

$$S = 5050.$$

Exemple

Calculons :

$$S = 2 + 4 + 6 + \dots + 50.$$

On factorise par 2 :

$$S = 2(1 + 2 + 3 + \dots + 25).$$

Donc :

$$S = 2 \times \frac{25 \times 26}{2}.$$

Ainsi :

$$S = 650.$$

6) Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété

Pour additionner plusieurs termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$\text{Somme} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Remarque

Si l'on additionne :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n,$$

il y a :

$$n + 1$$

termes.

Donc :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n + 1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Propriété

Plus généralement, entre u_p et u_n , le nombre de termes est :

$$n - p + 1.$$

Ainsi :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n - p + 1) \frac{u_p + u_n}{2}$$

Méthode

Pour calculer une somme de termes consécutifs :

- 1- On détermine le premier terme.
- 2- On détermine le dernier terme.
- 3- On compte le nombre de termes.
- 4- On applique :

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}.$$

Attention

Le nombre de termes est souvent la principale source d'erreur.

Par exemple, de u_0 à u_7 , il y a :

$$8 \text{ termes}$$

et non 7.

Exemple

On considère une suite arithmétique de premier terme :

$$u_0 = 2$$

et de raison :

$$r = 3.$$

On veut calculer :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_7.$$

Commençons par calculer u_7 :

$$u_7 = u_0 + 7r.$$

Donc :

$$u_7 = 2 + 7 \times 3 = 23.$$

De u_0 à u_7 , il y a :

$$7 - 0 + 1 = 8$$

termes.

Ainsi :

$$S = 8 \times \frac{2 + 23}{2}.$$

Donc :

$$S = 8 \times \frac{25}{2} = 100.$$

Ainsi :

$$\boxed{S = 100}.$$

Exemple

On considère une suite arithmétique telle que :

$$u_6 = 1$$

et de raison :

$$r = 7.$$

On veut calculer :

$$S = u_6 + u_7 + \cdots + u_{15}.$$

Calculons d'abord u_{15} :

$$u_{15} = u_6 + (15 - 6) \times 7.$$

Donc :

$$u_{15} = 1 + 9 \times 7 = 64.$$

Le nombre de termes est :

$$15 - 6 + 1 = 10.$$

Ainsi :

$$S = 10 \times \frac{1 + 64}{2}.$$

Donc :

$$S = 10 \times \frac{65}{2} = 325.$$

Ainsi :

$$\boxed{S = 325}.$$

7) Formules à connaître

Méthode

Pour une suite arithmétique de raison r :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

$$r = u_{n+1} - u_n$$

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

et, si le premier terme est u_0 :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Avec le premier terme, le dernier terme et le nombre de termes :

$$\text{dernier terme} = \text{premier terme} + (\text{nombre de termes} - 1) \times r$$

et :

$$\text{premier terme} = \text{dernier terme} - (\text{nombre de termes} - 1) \times r$$

Pour les sommes :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

et :

$$\text{Somme de termes consécutifs} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$