



Cours : Fonctions dérivées et applications

1) Opérations sur les fonctions dérivées

A) Dérivée d'une somme

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle.
Alors $u + v$ est dérivable et :

$$(u + v)' = u' + v'$$

Exemple

Soit :

$$f(x) = \sqrt{x} + x^2.$$

Pour $x > 0$:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

et :

$$(x^2)' = 2x.$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x$$

pour $x > 0$.

B) Multiplication par une constante

Propriété

Soit u une fonction dérivable et λ un réel.
Alors :

$$(\lambda u)' = \lambda u'$$

Exemple

Soit :

$$f(x) = 3x^4.$$

On sait que :

$$(x^4)' = 4x^3.$$

Donc :

$$f'(x) = 3 \times 4x^3.$$

Ainsi :

$$\boxed{f'(x) = 12x^3}.$$

C) Dérivée d'un produit

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle.

Alors :

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$$

Attention

La dérivée d'un produit n'est pas :

$$u'v'.$$

La formule à utiliser est :

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'}.$$

Méthode

Pour dériver :

$$f(x) = u(x)v(x),$$

on procède ainsi :

- 1- On identifie u et v .
- 2- On calcule u' et v' .
- 3- On applique :

$$f' = u'v + uv'.$$

- 4- On simplifie.

Exemple

Soit :

$$f(x) = x(2x + 1).$$

On pose :

$$u(x) = x \quad \text{et} \quad v(x) = 2x + 1.$$

Alors :

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = 2.$$

Donc :

$$f'(x) = 1(2x + 1) + 2x.$$

Ainsi :

$$\boxed{f'(x) = 4x + 1}.$$

D) Dérivée de l'inverse d'une fonction

Propriété

Soit v une fonction dérivable sur un intervalle et telle que :

$$v(x) \neq 0.$$

Alors :

$$\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}}$$

Exemple

Soit :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}.$$

On pose :

$$v(x) = x^2 + 3.$$

Alors :

$$v'(x) = 2x.$$

Comme :

$$x^2 + 3 > 0$$

pour tout réel x , le dénominateur ne s'annule jamais.

Donc :

$$\boxed{f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 3)^2}}.$$

E) Dérivée d'un quotient

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables, avec :

$$v(x) \neq 0.$$

Alors :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Attention

Dans le numérateur, il faut respecter l'ordre :

$$u'v - uv'.$$

Exemple

Soit :

$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2+1}.$$

On pose :

$$u(x) = 3x+1 \quad \text{et} \quad v(x) = x^2+1.$$

Alors :

$$u'(x) = 3 \quad \text{et} \quad v'(x) = 2x.$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{3(x^2+1) - (3x+1)(2x)}{(x^2+1)^2}.$$

On développe :

$$3(x^2+1) = 3x^2+3$$

et :

$$(3x+1)(2x) = 6x^2+2x.$$

Ainsi :

$$f'(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 3}{(x^2+1)^2}.$$

F) Dérivée d'une puissance d'une fonction

Propriété

Soit u une fonction dérivable et n un entier naturel non nul.

Alors :

$$(u^n)' = n u' u^{n-1}$$

Exemple

Soit :

$$f(x) = (2x + 1)^4.$$

On pose :

$$u(x) = 2x + 1.$$

Alors :

$$u'(x) = 2.$$

Donc :

$$f'(x) = 4 \times 2 \times (2x + 1)^3.$$

Ainsi :

$$f'(x) = 8(2x + 1)^3.$$

2) Composition avec une fonction affine

Définition

Soient deux fonctions f et g .

La fonction composée $f \circ g$ est définie par :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

lorsque $g(x)$ appartient à l'ensemble de définition de f .

Exemple

On considère :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

et :

$$g(x) = 2x - 5.$$

Alors :

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{2x - 5}.$$

Cette expression est définie lorsque :

$$2x - 5 \geq 0.$$

Donc :

$$x \geq \frac{5}{2}.$$

Propriété

Soit :

$$h(x) = f(ax + b).$$

Si f est dérivable, alors :

$$h'(x) = a f'(ax + b)$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles cette dérivée est définie.

Exemple

Soit :

$$h(x) = \sqrt{2x - 5}.$$

On sait que :

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Donc :

$$h'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x - 5}}.$$

Ainsi :

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 5}}$$

pour :

$$x > \frac{5}{2}.$$

3) Signe de la dérivée et variations

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

— Si :

$$f'(x) \geq 0$$

pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I .

— Si :

$$f'(x) \leq 0$$

pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I .

— Si :

$$f'(x) = 0$$

pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I .

Remarque

Dans les exercices, on utilise généralement la démarche :

$$f' \longrightarrow \text{signe de } f' \longrightarrow \text{variations de } f$$

Exemple

Si, sur un intervalle I :

$$f'(x) > 0,$$

alors :

f est strictement croissante sur I .

Par exemple, si :

$$f'(x) = 2x + 4$$

et que l'on travaille sur $[0; 5]$, alors :

$$2x + 4 > 0.$$

Donc :

f est strictement croissante sur $[0; 5]$.

Méthode

Pour étudier les variations d'une fonction :

1- On calcule $f'(x)$.

2- On résout :

$$f'(x) = 0.$$

3- On étudie le signe de $f'(x)$.

4- On en déduit les intervalles sur lesquels f est croissante ou décroissante.

5- On calcule les valeurs de f aux points importants pour compléter le tableau de variations.

Exemple

Soit :

$$f(x) = 2x + 1.$$

On a :

$$f'(x) = 2.$$

Comme :

$$2 > 0,$$

on a :

$$f'(x) > 0$$

pour tout réel x .

Donc :

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple – Énoncé

Étudier les variations de la fonction :

$$f(x) = x^2 + 3x - 8.$$

Exemple – Résolution

On dérive :

$$f'(x) = 2x + 3.$$

On cherche lorsque la dérivée s'annule :

$$2x + 3 = 0.$$

Donc :

$$x = -\frac{3}{2}.$$

Comme $f'(x) = 2x + 3$ est une fonction affine de coefficient directeur positif :

$$f'(x) < 0 \quad \text{si} \quad x < -\frac{3}{2},$$

et :

$$f'(x) > 0 \quad \text{si} \quad x > -\frac{3}{2}.$$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

On en déduit que f est :

$$\left. \begin{array}{l} \text{décroissante sur} \end{array} \right] -\infty; -\frac{3}{2} \Big]$$

puis :

$$\left[-\frac{3}{2}; +\infty \right[\text{croissante sur}$$

Exemple – Résolution (suite)

Calculons la valeur de f au point où la dérivée s'annule :

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) - 8.$$

Donc :

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 8.$$

En mettant au même dénominateur :

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9 - 18 - 32}{4}.$$

Ainsi :

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{41}{4}.$$

Le tableau de variations est :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{41}{4}$	$\nearrow$

La fonction admet donc un minimum égal à :

$$-\frac{41}{4}$$

atteint pour :

$$x = -\frac{3}{2}.$$

4) Maximum, minimum et extremum

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f admet un **maximum** en $a \in I$ si :

$$f(x) \leq f(a)$$

pour tout $x \in I$.

La valeur :

$$f(a)$$

est alors le maximum de f sur I .

On dit que f admet un **minimum** en $a \in I$ si :

$$f(x) \geq f(a)$$

pour tout $x \in I$.

La valeur :

$$f(a)$$

est alors le minimum de f sur I .

Un maximum ou un minimum est appelé un **extremum**.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle et soit a un point situé à l'intérieur de cet intervalle.

Si f admet un extremum local en a , alors :

$$\boxed{f'(a) = 0}.$$

La tangente à la courbe au point d'abscisse a est alors horizontale.

Attention

La réciproque est fausse.

Le fait d'avoir :

$$f'(a) = 0$$

ne suffit pas pour conclure que f possède un extremum en a .

Par exemple, pour :

$$f(x) = x^3,$$

on a :

$$f'(x) = 3x^2$$

donc :

$$f'(0) = 0.$$

Pourtant, f reste croissante de part et d'autre de 0 : elle ne possède donc ni maximum ni minimum en 0.

Propriété

Soit f une fonction dérivable autour d'un réel a .

Si f' est négative avant a , s'annule en a , puis devient positive après a :

$$f'(x) < 0 \quad \text{pour } x < a$$

et :

$$f'(x) > 0 \quad \text{pour } x > a,$$

alors f décroît puis croît.

La fonction f admet donc un **minimum local en a** .

Si f' est positive avant a , s'annule en a , puis devient négative après a :

$$f'(x) > 0 \quad \text{pour } x < a$$

et :

$$f'(x) < 0 \quad \text{pour } x > a,$$

alors f croît puis décroît.

La fonction f admet donc un **maximum local en a** .

Remarque

Pour reconnaître un extremum avec la dérivée, il faut regarder le **changement de signe de f' autour du point considéré**.

$$f' : - \longrightarrow + \quad \implies \quad \text{minimum local}$$

$$f' : + \longrightarrow - \quad \implies \quad \text{maximum local}$$

Si f' ne change pas de signe, le fait que $f'(a) = 0$ ne suffit pas pour conclure à l'existence d'un extremum.

Exemple

On reprend :

$$f(x) = x^2 + 3x - 8.$$

Nous avons trouvé :

$$f'(x) < 0$$

pour :

$$x < -\frac{3}{2},$$

et :

$$f'(x) > 0$$

pour :

$$x > -\frac{3}{2}.$$

La dérivée change donc de signe de négatif à positif.

La fonction décroît puis croît.

Elle admet donc un minimum pour :

$$x = -\frac{3}{2}.$$

Ce minimum vaut :

$$-\frac{41}{4}.$$

Il est atteint pour :

$$x = -\frac{3}{2}.$$

5) Exemple type complet

Exemple – Énoncé

Soit la fonction :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5.$$

- 1) Calculer $f'(x)$.
- 2) Factoriser $f'(x)$.
- 3) Étudier le signe de $f'(x)$.
- 4) En déduire les variations de f .
- 5) Déterminer les extrema locaux de f .

Exemple – Résolution

1) Calcul de la dérivée

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$$

Donc :

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 6x - 9}.$$

2) Factorisation

On factorise par 3 :

$$f'(x) = 3(x^2 - 2x - 3).$$

Or :

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1).$$

Donc :

$$\boxed{f'(x) = 3(x - 3)(x + 1)}.$$

3) Étude du signe

Les racines de f' sont :

$$-1 \quad \text{et} \quad 3.$$

Comme le coefficient devant x^2 est positif :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Exemple – Résolution (suite)

4) Variations de f

On en déduit que f est :

croissante sur $] - \infty; -1]$

puis :

décroissante sur $[-1; 3]$

puis :

croissante sur $[3; +\infty[$.

Calculons les valeurs importantes :

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10.$$

Donc :

$$f(-1) = 10.$$

De même :

$$f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22.$$

Donc :

$$f(3) = -22.$$

5) Extrema locaux

En $x = -1$, f' passe de positif à négatif.

La fonction possède donc un maximum local égal à :

$$10$$

atteint pour :

$$x = -1.$$

En $x = 3$, f' passe de négatif à positif.

La fonction possède donc un minimum local égal à :

$$-22$$

atteint pour :

$$x = 3.$$

6) Formules à retenir

Somme et constante

Somme

$$(u + v)' = u' + v'$$

Multiplication par une constante

$$(\lambda u)' = \lambda u'$$

Produit

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Inverse et quotient

Inverse

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Quotient

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

avec :

$$v(x) \neq 0.$$

Puissance d'une fonction

$$(u^n)' = n u' u^{n-1}$$

Composition avec une fonction affine

Si :

$$h(x) = f(ax + b),$$

alors :

$$h'(x) = a f'(ax + b)$$

Signe de la dérivée

Sur un intervalle I :

$$f'(x) \geq 0 \implies f \text{ est croissante sur } I$$

$$f'(x) \leq 0 \implies f \text{ est décroissante sur } I$$

Fonction constante

Si :

$$f'(x) = 0$$

pour tout $x \in I$, alors :

$$\boxed{f \text{ est constante sur } I}$$

Extremum : condition nécessaire

Si a est situé à l'intérieur de l'intervalle et si f possède un extremum local en a , alors :

$$\boxed{f'(a) = 0}$$

Attention : cette condition seule ne suffit pas pour affirmer qu'il existe un extremum.

Identifier un minimum local

Si f' change de signe de négatif à positif au voisinage de a :

$$f'(x) < 0 \quad \text{avant } a$$

et :

$$f'(x) > 0 \quad \text{après } a,$$

alors :

$$\boxed{f \text{ possède un minimum local en } a}$$

Identifier un maximum local

Si f' change de signe de positif à négatif au voisinage de a :

$$f'(x) > 0 \quad \text{avant } a$$

et :

$$f'(x) < 0 \quad \text{après } a,$$

alors :

$$\boxed{f \text{ possède un maximum local en } a}$$