



Chapitre : Équations

1) Connaître la notion d'équation

Définition

Une équation est une égalité qui comporte au moins un nombre de valeur inconnue, généralement désigné par une lettre.

Cette égalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue et fausse pour d'autres.

Exemple

L'égalité suivante est une équation d'inconnue x :

$$3 + x = 11$$

Si $x = 8$, alors :

$$3 + x = 3 + 8 = 11$$

L'égalité est vraie.

Si $x = 4$, alors :

$$3 + x = 3 + 4 = 7$$

L'égalité est fausse.

Définition

Une solution d'une équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie.

Exemple

On considère l'équation :

$$3 + x = 11$$

Si $x = 8$, alors :

$$3 + x = 3 + 8 = 11$$

L'égalité est vraie, donc 8 est une solution de l'équation.

Si $x = 7$, alors :

$$3 + x = 3 + 7 = 10$$

L'égalité est fausse, donc 7 n'est pas une solution de l'équation.

Méthode

Pour tester si un nombre est une solution d'une équation d'inconnue x :

- On calcule le membre de gauche en remplaçant x par cette valeur ;
- On calcule le membre de droite en remplaçant x par cette valeur ;
- On observe si les deux membres sont égaux ou non, et on conclut.

Exemple

On veut tester si 8 est une solution de l'équation :

$$3x + 2 = 4x - 3$$

Pour $x = 8$:

Membre de gauche :

$$3x + 2 = 3 \times 8 + 2 = 24 + 2 = 26$$

Membre de droite :

$$4x - 3 = 4 \times 8 - 3 = 32 - 3 = 29$$

Les deux membres ne sont pas égaux, donc 8 n'est pas une solution de l'équation.

On veut tester si 5 est une solution de l'équation :

$$3x + 2 = 4x - 3$$

Pour $x = 5$:

Membre de gauche :

$$3x + 2 = 3 \times 5 + 2 = 15 + 2 = 17$$

Membre de droite :

$$4x - 3 = 4 \times 5 - 3 = 20 - 3 = 17$$

Les deux membres sont égaux, donc 5 est une solution de l'équation.

2) Résoudre une équation

Définition

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les solutions de cette équation.

Remarque

Il arrive qu'une équation n'ait pas de solution.

Propriété

Une égalité reste vraie lorsqu'on ajoute ou soustrait un même nombre à chacun de ses membres.

a , b et k désignent des nombres.

Si $a = b$, alors :

$$a + k = b + k$$

et

$$a - k = b - k$$

Exemple

On veut résoudre l'équation :

$$x - 7 = 2$$

On ajoute 7 à chacun des membres :

$$x - 7 + 7 = 2 + 7$$

Donc :

$$x = 9$$

Ainsi, 9 est la solution de cette équation.

On peut vérifier :

$$9 - 7 = 2$$

Exemple

On veut résoudre l'équation :

$$5 + x = 1$$

On soustrait 5 à chacun des membres :

$$5 + x - 5 = 1 - 5$$

Donc :

$$x = -4$$

Ainsi, -4 est la solution de cette équation.

On peut vérifier :

$$5 + (-4) = 1$$

Propriété

Une égalité reste vraie lorsqu'on multiplie ou divise chacun de ses membres par un même nombre non nul.

a , b et k désignent des nombres avec $k \neq 0$.

Si $a = b$, alors :

$$a \times k = b \times k$$

et

$$\frac{a}{k} = \frac{b}{k}$$

Exemple

On veut résoudre l'équation :

$$\frac{x}{2} = 5$$

On multiplie par 2 chacun des membres :

$$\frac{x}{2} \times 2 = 5 \times 2$$

Donc :

$$x = 10$$

Ainsi, 10 est la solution de cette équation.

On peut vérifier :

$$\frac{10}{2} = 5$$

Exemple

On veut résoudre l'équation :

$$3x = -1$$

On divise par 3 chacun des membres :

$$\frac{3x}{3} = \frac{-1}{3}$$

Donc :

$$x = -\frac{1}{3}$$

Ainsi, $-\frac{1}{3}$ est la solution de cette équation.

On peut vérifier :

$$3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$

3) Modéliser une situation par une équation

Méthode

Pour modéliser une situation à l'aide d'une équation, on suit les étapes suivantes :

1- Choix de l'inconnue

On choisit l'inconnue, généralement notée x , qui désigne ce que l'on cherche.

2- Mise en équation

On traduit les données de l'énoncé du problème par une équation.

3- Résolution

On résout l'équation en utilisant les propriétés du cours.

4- Conclusion

On interprète le résultat en rédigeant une phrase réponse.

Exemple

Léa a acheté 19 bonbons de trois parfums différents : à la fraise, à la réglisse et à la menthe.

Elle constate qu'elle a 4 bonbons à la menthe et deux fois plus de bonbons à la réglisse qu'à la fraise.

Combien a-t-elle de bonbons à la fraise ?

1- Choix de l'inconnue

On appelle x le nombre de bonbons à la fraise.

2- Mise en équation

Il y a deux fois plus de bonbons à la réglisse qu'à la fraise.

Le nombre de bonbons à la réglisse est donc $2x$.

Il y a aussi 4 bonbons à la menthe.

Le nombre total de bonbons est donc :

$$x + 2x + 4$$

Or Léa a acheté 19 bonbons.

On obtient donc l'équation :

$$x + 2x + 4 = 19$$

3- Résolution

$$x + 2x + 4 = 19$$

$$3x + 4 = 19$$

On soustrait 4 aux deux membres :

$$3x + 4 - 4 = 19 - 4$$

$$3x = 15$$

On divise les deux membres par 3 :

$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$$

$$x = 5$$

4- Conclusion

Léa a donc acheté 5 bonbons à la fraise.

On peut vérifier :

$$5 + 2 \times 5 + 4 = 5 + 10 + 4 = 19$$