



Cours : Géométrie vectorielle dans le plan

1) Norme d'un vecteur

Définition

Soit un vecteur :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}.$$

La **norme** du vecteur $\vec{u}$ est la longueur AB .

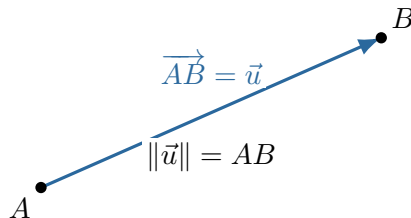
On note :

$$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB.$$

Si :

$$\|\vec{u}\| = 1,$$

alors $\vec{u}$ est appelé un **vecteur unitaire**.



Propriétés

On a :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 0 \iff A = B$$

et, pour tout réel k :

$$\|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|.$$

Dans un repère orthonormé, si :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

alors :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Attention

En général :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

Exemple

Soit :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2}.$$

Donc :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}.$$

Ainsi :

$$\|\vec{u}\| = 5.$$

2) Colinéarité de deux vecteurs

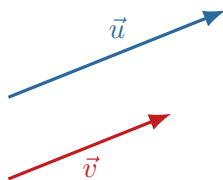
Définition

Deux vecteurs sont **colinéaires** lorsqu'ils ont la même direction.

Ils peuvent avoir :

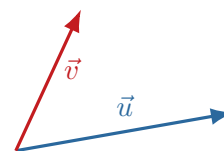
- le même sens ;
- ou des sens opposés.

Vecteurs colinéaires



$$\vec{v} = k\vec{u}$$

Vecteurs non colinéaires



$$\vec{v} \neq k\vec{u}$$

Attention

On dit :

deux vecteurs sont colinéaires

et :

deux droites sont parallèles.

Théorème

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Ils sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que :

$$\vec{v} = k\vec{u}.$$

Le nombre k est appelé le **coefficient de colinéarité**.

Remarque

Si :

$$k > 0,$$

les deux vecteurs sont de même sens.

Si :

$$k < 0,$$

les deux vecteurs sont de sens opposés.

Exemple

On considère :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

On remarque que :

$$15 = -3 \times (-5)$$

et :

$$-9 = -3 \times 3.$$

Donc :

$$\vec{v} = -3\vec{u}.$$

Ainsi :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Comme :

$$-3 < 0,$$

ils sont de sens opposés.

Remarque

Le vecteur nul :

$$\vec{0}$$

est colinéaire à tous les vecteurs.

3) Déterminant de deux vecteurs

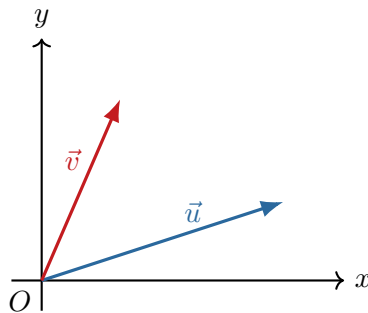
Définition

Dans un repère, soient :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y.$$



Remarque

Si :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0,$$

les deux vecteurs ne sont pas colinéaires : ils donnent donc deux directions différentes dans le plan.

Exemple

Soient :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \times (-4) - 3 \times (-2).$$

Donc :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = -4 + 6.$$

Ainsi :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2.$$

Théorème

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0.$$

Méthode

Pour déterminer si deux vecteurs sont colinéaires :

- 1- On écrit leurs coordonnées.
- 2- On calcule :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y.$$

- 3- Si le résultat vaut 0, les vecteurs sont colinéaires.
- 4- Sinon, ils ne sont pas colinéaires.

Exemple

Soient :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times (-15) - (-6) \times 5.$$

Donc :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = -30 + 30 = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}}$$

4) Alignement et parallélisme

Propriétés

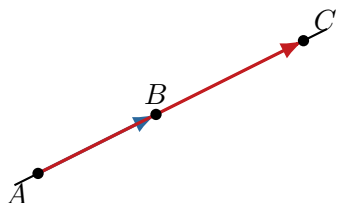
Trois points A , B et C sont alignés si et seulement si :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires.}}$$

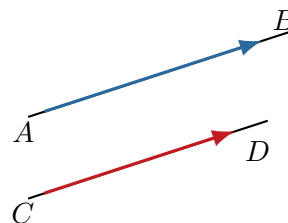
Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont colinéaires.}}$$

Points alignés



Droites parallèles



Méthode

Pour montrer que trois points A , B et C sont alignés :

- 1- On calcule les coordonnées de :

$$\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}.$$

- 2- On calcule :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

- 3- Si ce déterminant vaut 0, alors les points sont alignés.

Exemple

On considère :

$$A(1;2), \quad B(3;5), \quad C(5;8).$$

On a :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Et :

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Calculons :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2 \times 6 - 4 \times 3.$$

Donc :

$$12 - 12 = 0.$$

Ainsi :

A, B et C sont alignés.

5) Vecteur directeur d'une droite

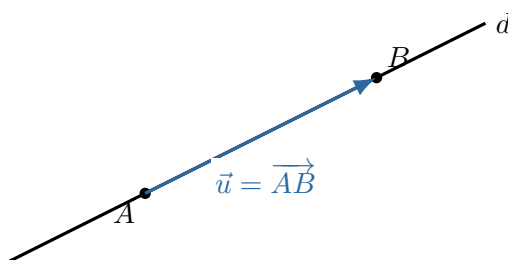
Définition

Un **vecteur directeur** d'une droite d est un vecteur non nul qui possède la même direction que la droite.

Si A et B sont deux points distincts de d , alors :

$$\overrightarrow{AB}$$

est un vecteur directeur de d .



Attention

Un vecteur directeur d'une droite ne peut jamais être le vecteur nul.

Propriété

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Propriété

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d , alors tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de d .

Propriété

Soit A un point d'une droite d et $\vec{u}$ un vecteur directeur de d .

Un point M appartient à d si et seulement si :

$$\overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires.}$$

6) Lire un vecteur directeur à partir d'une équation

Propriétés

Pour une droite d'équation :

$$x = k,$$

un vecteur directeur est :

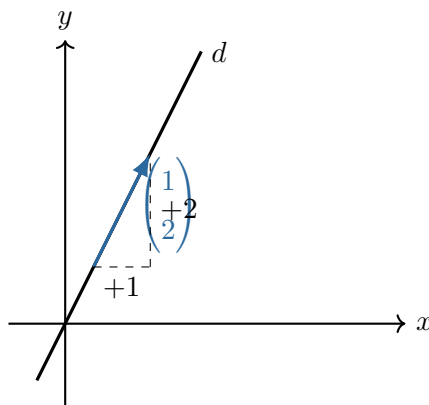
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour une droite d'équation :

$$y = mx + p,$$

un vecteur directeur est :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$



Remarque

Pour une droite d'équation :

$$y = 2x + p,$$

le vecteur :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

traduit graphiquement que lorsque l'on avance de 1 horizontalement, on monte de 2 verticalement.

Exemple

La droite :

$$d : y = 3x - 2$$

a pour coefficient directeur :

$$m = 3.$$

Un vecteur directeur de d est donc :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On pourrait aussi utiliser :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

car ces deux vecteurs sont colinéaires.

7) Équation cartésienne d'une droite

Définition

Toute droite du plan possède une équation de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

où a , b et c sont des réels avec :

$$(a; b) \neq (0; 0).$$

Cette équation est appelée une **équation cartésienne de la droite**.

Remarque

Dire que la droite d a pour équation :

$$ax + by + c = 0$$

signifie qu'un point :

$$M(x; y)$$

appartient à d si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation.

Théorème

Pour une droite d'équation cartésienne :

$$ax + by + c = 0,$$

un vecteur directeur est :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

Remarque

Si :

$$b \neq 0,$$

on peut transformer :

$$ax + by + c = 0$$

en :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Le coefficient directeur est donc :

$$m = -\frac{a}{b}.$$

Exemple

On considère la droite :

$$d : -2x + 4y - 5 = 0.$$

Ici :

$$a = -2 \quad \text{et} \quad b = 4.$$

Un vecteur directeur est donc :

$$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On peut simplifier ce vecteur en divisant ses coordonnées par -2 :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Attention

Une droite possède une infinité d'équations cartésiennes.

Par exemple :

$$-2x + 4y - 5 = 0$$

et :

$$2x - 4y + 5 = 0$$

représentent la même droite.

8) Déterminer une équation cartésienne

Méthode

Pour déterminer une équation cartésienne d'une droite passant par :

$$A(x_A; y_A)$$

et ayant pour vecteur directeur :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

on utilise un point quelconque :

$$M(x; y).$$

Le point M appartient à la droite si et seulement si :

$$\overrightarrow{AM}$$

et :

$$\vec{u}$$

sont colinéaires.

Donc :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0.$$

Avec :

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix},$$

on obtient :

$$\boxed{\beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0.}$$

Il suffit ensuite de développer.

Exemple

Déterminons une équation de la droite passant par :

$$A(1; 2)$$

et de vecteur directeur :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Soit :

$$M(x; y)$$

un point de la droite.

On a :

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ doivent être colinéaires :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0.$$

Donc :

$$2(x - 1) - 3(y - 2) = 0.$$

On développe :

$$2x - 2 - 3y + 6 = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{2x - 3y + 4 = 0.}$$

9) Parallélisme de deux droites

Propriété

Soient :

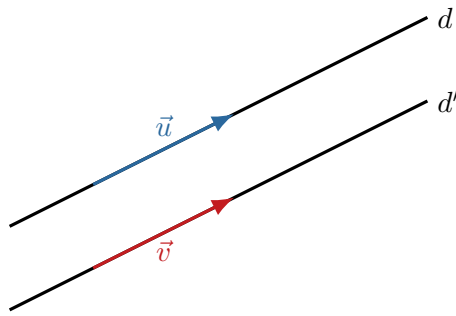
$$d : ax + by + c = 0$$

et :

$$d' : a'x + b'y + c' = 0.$$

Les droites d et d' sont parallèles si et seulement si :

$$\boxed{ab' - a'b = 0.}$$



Remarque

Les droites sont parallèles car leurs vecteurs directeurs ont la même direction : ils sont colinéaires.

Exemple

On considère :

$$d : 2x - 3y + 4 = 0$$

et :

$$d' : 4x - 6y - 1 = 0.$$

On calcule :

$$ab' - a'b = 2 \times (-6) - 4 \times (-3).$$

Donc :

$$-12 + 12 = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{d \parallel d'}.$$

10) Les différentes formes d'équations de droites

Propriété

Équation	Type de droite	Vecteur directeur
$x = k$	verticale	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$y = k$	horizontale	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$y = mx + p$	non verticale	$\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$
$ax + by + c = 0$	équation cartésienne	$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

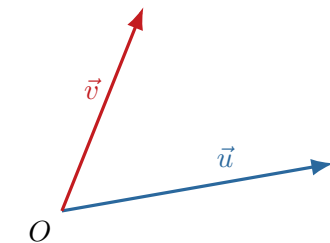
11) Base du plan

Définition

Une **base du plan** est un couple de deux vecteurs non colinéaires.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, on note cette base :

$$(\vec{u}, \vec{v}).$$



$(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan

Remarque

Dans un repère :

$$(O; \vec{i}, \vec{j}),$$

les vecteurs :

$$\vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{j}$$

forment une base du plan.

Propriété

Dire que le point :

$$M(x; y)$$

a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ signifie :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

De même, dire que :

$$\vec{w} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

signifie :

$$\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

12) Décomposer un vecteur dans une base

Théorème

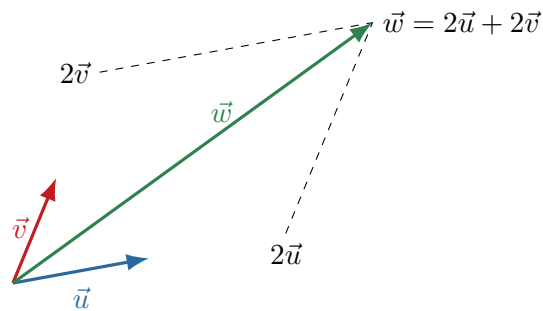
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

Pour tout vecteur $\vec{w}$ du plan, il existe un unique couple de réels $(a; b)$ tel que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Les nombres a et b sont les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base :

$$(\vec{u}, \vec{v}).$$



Exemple

On considère :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et :

$$\vec{w} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On cherche a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

En additionnant les deux équations :

$$2a = 8.$$

Donc :

$$a = 4.$$

Puis :

$$4 + b = 6$$

donc :

$$b = 2.$$

Ainsi :

$$\boxed{\vec{w} = 4\vec{u} + 2\vec{v}.}$$

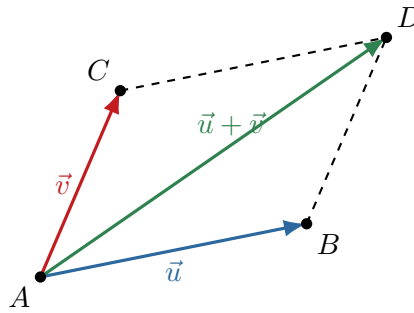
13) Vecteurs et parallélogramme

Propriété

Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même origine, leur somme :

$$\vec{u} + \vec{v}$$

est représentée par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.



Propriété

Dans la figure précédente :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

Le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

Remarque

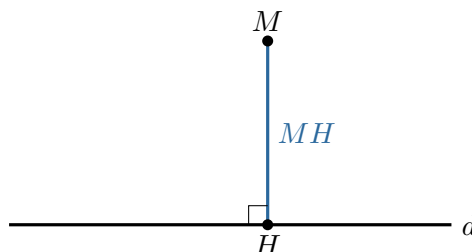
Cette construction est appelée la **règle du parallélogramme**.
Elle permet de visualiser géométriquement l'addition de deux vecteurs.

14) Projection orthogonale

Définition

Soit d une droite et M un point n'appartenant pas à d .
Le **projeté orthogonal** de M sur d est le point H de la droite d tel que :

$$(MH) \perp d.$$



Remarque

Si M appartient déjà à la droite d , alors M est son propre projeté orthogonal sur d .

Définition

La **distance du point M à la droite d** est la longueur :

$$MH$$

où H est le projeté orthogonal de M sur d .

Propriété

La distance d'un point M à une droite d est la plus courte distance entre M et un point de d .

Exemple

$ABCD$ est un rectangle tel que :

$$AB = 7$$

et :

$$BC = 3.$$

Le projeté orthogonal de D sur la droite (BC) est le point C .

La distance de D à la droite (BC) vaut donc :

$$DC.$$

Or, dans un rectangle :

$$DC = AB = 7.$$

Ainsi :

$$\boxed{d(D, (BC)) = 7.}$$

15) Exemple type complet

Exemple – Énoncé

Dans un repère, on considère les points :

$$A(1; 2), \quad B(4; 4)$$

et la droite :

$$d : 2x - 3y + 5 = 0.$$

- 1) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
- 2) Calculer la norme de $\overrightarrow{AB}$.
- 3) Donner un vecteur directeur de d .
- 4) Déterminer si (AB) et d sont parallèles.

Exemple – Résolution

1) Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} .}$$

2) Norme

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 2^2}.$$

Donc :

$$\boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{13} .}$$

3) Vecteur directeur de d

La droite :

$$d : 2x - 3y + 5 = 0$$

a pour :

$$a = 2, \quad b = -3.$$

Un vecteur directeur est donc :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} .}$$

4) Parallélisme

On a :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}.$$

Les vecteurs sont donc colinéaires.

Ainsi :

$$\boxed{(AB) \parallel d .}$$

16) Formules à retenir

Norme

Si :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

alors :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et :

$$\|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|.$$

Déterminant et colinéarité

Si :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

alors :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$$

et :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0.$$

Alignement et parallélisme

$$A, B, C \text{ alignés} \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires}$$

$$(AB) \parallel (CD) \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires}$$

Vecteur directeur

Pour :

$$d : y = mx + p,$$

un vecteur directeur est :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

Pour :

$$d : ax + by + c = 0,$$

un vecteur directeur est :

$$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

Équation cartésienne

Une équation cartésienne d'une droite est :

$$ax + by + c = 0$$

avec :

$$(a; b) \neq (0; 0).$$

Si :

$$b \neq 0,$$

alors :

$$m = -\frac{a}{b}.$$

Droites parallèles

Pour :

$$d : ax + by + c = 0$$

et :

$$d' : a'x + b'y + c' = 0,$$

on a :

$$d \parallel d' \iff ab' - a'b = 0.$$

Décomposition dans une base

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, tout vecteur $\vec{w}$ s'écrit de manière unique :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Addition de vecteurs

Avec la règle du parallélogramme :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

lorsque $ABDC$ est un parallélogramme.

Projection orthogonale

Si H est le projeté orthogonal de M sur une droite d :

$$H \in d$$

et :

$$(MH) \perp d.$$

La distance de M à d est :

$$MH.$$