



Cours : Produit scalaire dans le plan

1) Produit scalaire de deux vecteurs

Définition

Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un nombre réel noté :

$$\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Une première formule permettant de le calculer est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right).$$

Remarque

Le résultat d'un produit scalaire est un **nombre** et non un vecteur.

De plus :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

et :

$$\vec{0} \cdot \vec{u} = 0.$$

2) Calcul avec les coordonnées

Théorème

Dans un repère orthonormé, si :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Méthode

Pour calculer un produit scalaire avec les coordonnées :

- 1- on multiplie les deux coordonnées en x ;
- 2- on multiplie les deux coordonnées en y ;
- 3- on additionne les deux résultats.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Exemple

On considère :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 5 + (-3) \times 2.$$

Donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 10 - 6.$$

Ainsi :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 4}.$$

Remarque

Dans un repère orthonormé :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2.$$

Donc :

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

3) Propriétés de calcul

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}}$$

et pour tous réels λ et μ :

$$\boxed{(\lambda \vec{u}) \cdot (\mu \vec{v}) = \lambda \mu (\vec{u} \cdot \vec{v})}.$$

Exemple

On sait que :

$$\|\vec{u}\| = 3, \quad \|\vec{v}\| = 2$$

et :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -5.$$

Calculons :

$$(2\vec{u}) \cdot (3\vec{v}).$$

On obtient :

$$(2\vec{u}) \cdot (3\vec{v}) = 6(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Donc :

$$6 \times (-5) = -30.$$

Ainsi :

$$\boxed{-30}.$$

4) Identités utiles

Propriétés

On a :

$$\boxed{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2}$$

et :

$$\boxed{\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2}.$$

Remarque

Ces formules ressemblent aux identités remarquables :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

et :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

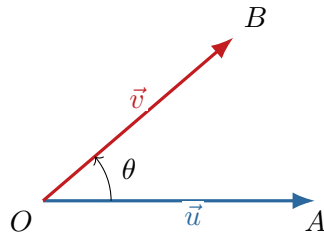
5) Produit scalaire et angle

Théorème

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Si θ est l'angle géométrique formé par ces deux vecteurs, alors :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)}.$$



Méthode

Pour calculer un angle entre deux vecteurs :

- 1- on calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$;
- 2- on calcule $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$;
- 3- on utilise :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

Exemple

On considère deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| = 4, \quad \|\vec{v}\| = 3$$

et formant un angle de :

$$60^\circ.$$

Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 3 \times \cos(60^\circ).$$

Or :

$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 6}.$$

Propriété

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

S'ils sont colinéaires et de sens opposés :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

6) Produit scalaire et orthogonalité

Définition

Deux vecteurs sont **orthogonaux** lorsque leurs directions sont perpendiculaires.

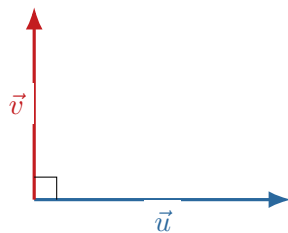
On note :

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v}}.$$

Théorème

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$



Exemple

On considère :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

et :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Calculons :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 10 + 5 \times (-4).$$

Donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 20 - 20 = 0.$$

Ainsi :

$$\vec{u} \perp \vec{v}.$$

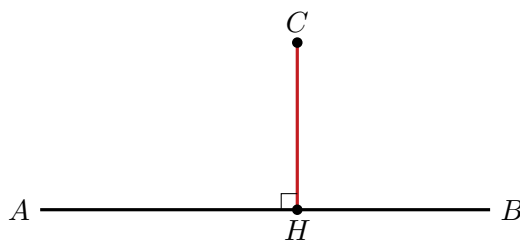
7) Projection orthogonale

Définition

Soit C un point et (AB) une droite.

Le **projeté orthogonal** de C sur (AB) est le point H de (AB) tel que :

$$(CH) \perp (AB).$$



Théorème

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) , alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}.$$

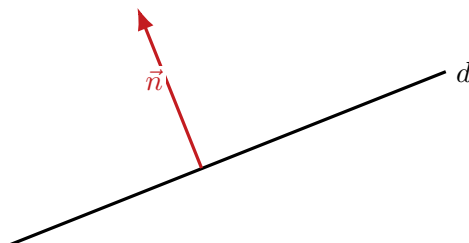
Remarque

Cette propriété permet de remplacer un vecteur par son projeté sur la direction de l'autre vecteur. Elle est surtout utile dans les exercices de géométrie.

8) Vecteur normal à une droite

Définition

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est un **vecteur normal** à une droite d lorsqu'il est orthogonal à un vecteur directeur de d .



Propriété

Si A est un point de la droite d et $\vec{n}$ un vecteur normal à d , alors :

$$M \in d \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

9) Vecteur normal et équation cartésienne

Théorème

Dans un repère orthonormé, si une droite d a pour équation :

$$ax + by + c = 0,$$

alors :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

est un vecteur normal à d .

Remarque

Pour la même droite :

$$ax + by + c = 0,$$

on peut donc retenir :

$$\text{vecteur normal } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

et :

$$\text{vecteur directeur } \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

Exemple

On considère :

$$d : 3x - y + 5 = 0.$$

Un vecteur normal est :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur directeur est :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vérifions qu'ils sont orthogonaux :

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 3 \times 1 + (-1) \times 3.$$

Donc :

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0.$$

10) Démontrer que deux droites sont perpendiculaires

Propriété

Soient :

$$d : ax + by + c = 0$$

et :

$$d' : a'x + b'y + c' = 0.$$

Alors :

$$d \perp d' \iff aa' + bb' = 0.$$

Remarque

Si les deux droites ont pour équations réduites :

$$y = mx + p$$

et :

$$y = m'x + p',$$

alors :

$$d \perp d' \iff mm' = -1.$$

Cette formule s'utilise lorsque les deux droites ne sont pas verticales.

Exemple

On considère :

$$d : 2x + 3y - 1 = 0$$

et :

$$d' : 3x - 2y + 5 = 0.$$

Les vecteurs normaux sont :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et :

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Calculons :

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 \times 3 + 3 \times (-2).$$

Donc :

$$6 - 6 = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{d \perp d'}.$$

11) Déterminer une droite perpendiculaire

Exemple – Énoncé

On considère :

$$d : 3x - y + 5 = 0.$$

Déterminer une équation de la droite d' :

- passant par $A(1; 2)$;
- perpendiculaire à d .

Exemple – Résolution

Un vecteur directeur de d est :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Comme d' est perpendiculaire à d , ce vecteur devient un vecteur normal de d' .

Une équation de d' est donc de la forme :

$$x + 3y + c = 0.$$

Le point :

$$A(1; 2)$$

appartient à d' .

Donc :

$$1 + 3 \times 2 + c = 0.$$

Ainsi :

$$1 + 6 + c = 0$$

donc :

$$c = -7.$$

Finalement :

$$d' : x + 3y - 7 = 0.$$

12) Distance d'un point à une droite

Propriété

Dans un repère orthonormé, soit :

$$d : ax + by + c = 0$$

et :

$$A(x_A; y_A).$$

La distance du point A à la droite d est :

$$d(A, d) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Remarque

Cette distance correspond à la longueur du segment reliant A à son projeté orthogonal sur la droite d .
C'est donc la **plus courte distance** entre A et la droite.

Exemple

On considère :

$$d : 4x - 3y + 3 = 0$$

et :

$$A(-1; 2).$$

On utilise :

$$d(A, d) = \frac{|4(-1) - 3 \times 2 + 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}.$$

Donc :

$$d(A, d) = \frac{|-4 - 6 + 3|}{\sqrt{16 + 9}}.$$

Ainsi :

$$d(A, d) = \frac{7}{5}.$$

Donc :

$$d(A, d) = \frac{7}{5}.$$

13) Exemple type complet

Exemple – Énoncé

Dans un repère orthonormé, on considère :

$$A(1; 2), \quad B(4; 6), \quad C(5; -1).$$

1) Calculer :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

2) Déterminer si l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.

3) Calculer les longueurs AB et AC .

4) En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exemple – Résolution

On a :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 6 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Et :

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ -1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1) Produit scalaire

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 4 + 4 \times (-3).$$

Donc :

$$12 - 12 = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.}$$

2) Angle

Les deux vecteurs sont orthogonaux.

Donc :

$$\boxed{\widehat{BAC} = 90^\circ.}$$

3) Longueurs

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Et :

$$AC = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5.$$

Donc :

$$\boxed{AB = AC = 5.}$$

4) Vérification avec le cosinus

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}.$$

Donc :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{0}{5 \times 5} = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\widehat{BAC} = 90^\circ.}$$

14) Formules à retenir

Produit scalaire avec les coordonnées

Si :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Produit scalaire et normes

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

Produit scalaire et angle

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

Donc :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Orthogonalité

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Vecteur normal

Pour :

$$d : ax + by + c = 0,$$

un vecteur normal est :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

et un vecteur directeur est :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

Droites perpendiculaires

Pour :

$$d : ax + by + c = 0$$

et :

$$d' : a'x + b'y + c' = 0,$$

on a :

$$d \perp d' \iff aa' + bb' = 0.$$

Pour deux équations réduites :

$$d \perp d' \iff mm' = -1.$$

Distance d'un point à une droite

Pour :

$$d : ax + by + c = 0$$

et :

$$A(x_A; y_A),$$

on a :

$$d(A, d) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$