



Chapitre 4 : Proportionnalité et pourcentages

I) Reconnaître la proportionnalité

Définition

Deux grandeurs sont proportionnelles si lorsque l'on multiplie ou lorsque l'on divise les valeurs de l'une par un même nombre, on obtient les valeurs de l'autre.

Ce nombre est appelé le **coefficient de proportionnalité**.

Exemple

Un primeur vend des pommes au kilogramme.

Masse de pommes en kg	2	4	7
Prix en euros	3	6	10,50

On vérifie :

$$\frac{3}{2} = 1,5 \quad \frac{6}{4} = 1,5 \quad \frac{10,50}{7} = 1,5.$$

Les rapports sont égaux, donc le prix est proportionnel à la masse de pommes.

Le coefficient de proportionnalité est 1,5.

Exemple

On considère le tableau suivant :

Nombre de cahiers	2	4	6
Prix en euros	3	5	9

On vérifie :

$$\frac{3}{2} = 1,5 \quad \frac{5}{4} = 1,25 \quad \frac{9}{6} = 1,5.$$

Les rapports ne sont pas tous égaux.

Donc le prix n'est pas proportionnel au nombre de cahiers.

Propriété

Sur un graphique, une situation de proportionnalité est représentée par des points alignés avec l'origine du repère.

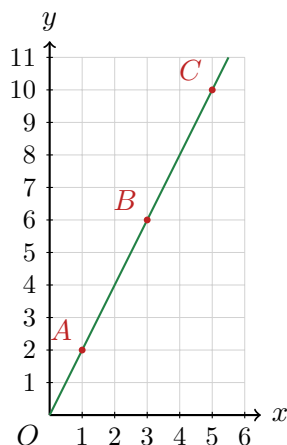
Exemple

On considère le tableau suivant :

x	1	3	5
y	2	6	10

Les points associés sont :

$$A(1; 2), \quad B(3; 6), \quad C(5; 10).$$



Les points A , B et C sont alignés avec l'origine du repère. Donc il s'agit d'une situation de proportionnalité.

II) La quatrième proportionnelle

Propriété

Dans une situation de proportionnalité, on peut utiliser la règle de trois ou le produit en croix.

Les nombres a , b et c étant connus, avec $a \neq 0$, on a :

a	c
b	x

L'égalité des produits en croix donne :

$$a \times x = b \times c.$$

Donc :

$$x = \frac{b \times c}{a}.$$

Exemple

On veut calculer x dans le tableau de proportionnalité suivant :

4	10
6	x

On utilise la règle de trois :

$$x = \frac{6 \times 10}{4} = \frac{60}{4} = 15.$$

Ainsi :

$$x = 15.$$

Exemple

Sur un plan, 3 cm représentent 12 m dans la réalité.

Quelle distance réelle représente 8 cm sur ce plan ?

Distance sur le plan en cm	3	8
Distance réelle en m	12	x

On calcule :

$$x = \frac{8 \times 12}{3} = \frac{96}{3} = 32.$$

Ainsi, 8 cm sur le plan représentent 32 m dans la réalité.

III) Les pourcentages

a) Appliquer un pourcentage

Propriété

p désigne un nombre positif.

Calculer $p\%$ d'une quantité revient à multiplier cette quantité par :

$$\frac{p}{100}.$$

Exemple

Dans un collège de 480 élèves, 35 % des élèves sont demi-pensionnaires.

On calcule :

$$480 \times \frac{35}{100} = 168.$$

Il y a donc 168 élèves demi-pensionnaires.

Exemple

Un article coûte 80 euros. Il bénéficie d'une réduction de 15 %.

On calcule le montant de la réduction :

$$80 \times \frac{15}{100} = 12.$$

La réduction est de 12 euros. Le nouveau prix est :

$$80 - 12 = 68.$$

L'article coûte maintenant 68 euros.

b) Calculer un pourcentage

Remarque

Pour calculer un pourcentage, on peut exprimer une proportion de dénominateur 100 ou utiliser un tableau de proportionnalité.

Exemple

Dans une association de 250 adhérents, 40 ont moins de 18 ans.

Quel pourcentage des adhérents ont moins de 18 ans ?

Nombre d'adhérents	250	40
Pourcentage	100	x

On calcule :

$$x = \frac{40 \times 100}{250} = 16.$$

Il y a donc 16 % des adhérents qui ont moins de 18 ans.

Méthode

Pour calculer un pourcentage, on peut aussi diviser la partie par le total, puis multiplier par 100.

Dans l'exemple précédent :

$$\frac{40}{250} = 0,16 \quad \text{et} \quad 0,16 \times 100 = 16.$$

Donc le pourcentage est 16 %.

IV) Vitesse moyenne

Définition

Lors d'un trajet, la vitesse n'est pas toujours constante : il peut y avoir des accélérations, des ralentissements ou des arrêts.

La vitesse moyenne est la vitesse qu'aurait un véhicule s'il parcourait la même distance, dans le même temps, en conservant toujours la même vitesse.

Propriété

La vitesse moyenne se calcule avec la formule :

$$v = \frac{d}{t}$$

où v désigne la vitesse moyenne, d la distance parcourue et t la durée du trajet.

On peut aussi utiliser :

$$d = v \times t \quad \text{et} \quad t = \frac{d}{v}.$$

Exemple

Un automobiliste roule à la vitesse moyenne de 90 km/h.

Cela signifie qu'à vitesse constante, il parcourt 90 km en 1 heure.

Exemple

Calculer une vitesse moyenne

Une cycliste parcourt 45 km en 3 h.

$$v = \frac{d}{t} = \frac{45}{3} = 15.$$

Sa vitesse moyenne est donc de 15 km/h.

Exemple

Calculer une distance

Un automobiliste roule pendant 2 h 30 min à la vitesse moyenne de 72 km/h.

On convertit :

$$2 \text{ h } 30 \text{ min} = 2,5 \text{ h.}$$

Puis :

$$d = v \times t = 72 \times 2,5 = 180.$$

L'automobiliste a parcouru 180 km.

Exemple

Calculer une durée

Un train parcourt 315 km à la vitesse moyenne de 90 km/h.

$$t = \frac{d}{v} = \frac{315}{90} = 3,5.$$

Or :

$$3,5 \text{ h} = 3 \text{ h } 30 \text{ min.}$$

Le trajet dure donc 3 h 30 min.

Remarque

Pour utiliser les formules de vitesse, il faut faire attention aux unités.

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s.}$$

Par exemple :

$$18 \text{ km/h} = \frac{18000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 5 \text{ m/s.}$$

De plus :

$$2,4 \text{ h} = 2 \text{ h} + 0,4 \text{ h} \quad \text{et} \quad 0,4 \text{ h} = 0,4 \times 60 = 24 \text{ min.}$$

Donc :

$$2,4 \text{ h} = 2 \text{ h } 24 \text{ min.}$$

V) Le ratio

Définition

Un ratio permet de comparer ou de partager des quantités.

Dire que deux nombres a et b sont dans le ratio 2 : 3 signifie que :

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3}.$$

Dire que trois nombres a , b et c sont dans le ratio 2 : 3 : 7 signifie que :

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}.$$

Exemple

Une poche de 5 bonbons est partagée entre Mona et Ninon dans le ratio 2 : 3.

Cela signifie que Mona reçoit 2 parts et Ninon reçoit 3 parts.

Il y a donc :

$$2 + 3 = 5$$

parts au total. Comme il y a 5 bonbons, une part vaut 1 bonbon.

Mona reçoit donc 2 bonbons et Ninon reçoit 3 bonbons.

a) Simplifier un ratio

Méthode

Pour simplifier un ratio, on divise chaque nombre par un diviseur commun, le plus grand possible.

Exemple

Simplifier le ratio :

$$24 : 36.$$

Le plus grand diviseur commun de 24 et 36 est 12.

$$24 \div 12 = 2 \quad \text{et} \quad 36 \div 12 = 3.$$

Donc :

$$24 : 36 = 2 : 3.$$

b) Partager une quantité

Méthode

Pour partager une quantité selon un ratio :

1. on additionne les nombres du ratio pour trouver le nombre total de parts ;
2. on divise la quantité totale par ce nombre de parts ;
3. on multiplie la valeur d'une part par chaque nombre du ratio.

Exemple

Un cocktail est préparé avec du jus d'orange, du jus de pomme et du jus d'ananas selon le ratio :

$$2 : 3 : 5.$$

On veut préparer 1 L de cocktail, soit 100 cL.

Le nombre total de parts est :

$$2 + 3 + 5 = 10.$$

On peut présenter la situation avec un tableau de proportionnalité.

Ingrédient	Orange	Pomme	Ananas	Total
Nombre de parts	2	3	5	10
Quantité en cL	x	y	z	100

Avec le produit en croix :

$$x = \frac{2 \times 100}{10} = 20, \quad y = \frac{3 \times 100}{10} = 30, \quad z = \frac{5 \times 100}{10} = 50.$$

Il faut donc 20 cL de jus d'orange, 30 cL de jus de pomme et 50 cL de jus d'ananas.