



Cours : Suites géométriques

1) Définition d'une suite géométrique

Définition

Une suite (u_n) est **géométrique** lorsque l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre.

Il existe donc un réel q tel que :

$$u_{n+1} = q u_n$$

Le nombre q est appelé la **raison** de la suite géométrique.

Propriété

Si $u_n \neq 0$, la raison peut être calculée à partir de deux termes consécutifs :

$$q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Exemple

On considère une suite géométrique de premier terme :

$$u_0 = 3$$

et de raison :

$$q = 2.$$

Chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par 2 :

$$u_1 = 2 \times 3 = 6$$

$$u_2 = 2 \times 6 = 12$$

$$u_3 = 2 \times 12 = 24.$$

Ainsi :

$$3; 6; 12; 24; \dots$$

Remarque

La relation :

$$u_{n+1} = q u_n$$

est la **relation de récurrence** d'une suite géométrique.

Elle permet de calculer un terme à partir du précédent.

Propriété

Si :

$$q = 1,$$

alors :

$$u_{n+1} = u_n.$$

Tous les termes sont donc égaux : la suite est **constante**.

2) Calculer directement un terme

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

Si l'on connaît un terme u_p , alors :

$$u_n = u_p q^{n-p}$$

En particulier, si le premier terme est u_0 :

$$u_n = u_0 q^n$$

Remarque

Cette formule est la **forme explicite** d'une suite géométrique.

Elle permet de calculer directement un terme sans calculer tous les termes précédents.

Méthode

Pour calculer directement u_n :

- 1- On repère un terme connu u_p .
- 2- On repère la raison q .
- 3- On utilise :

$$u_n = u_p q^{n-p}.$$

- 4- On remplace les valeurs et on calcule.

Exemple

On considère une suite géométrique de premier terme :

$$u_0 = -2$$

et de raison :

$$q = 4.$$

Pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 q^n.$$

Donc :

$$u_n = -2 \times 4^n$$

Par exemple :

$$u_3 = -2 \times 4^3 = -128.$$

Exemple

On considère une suite géométrique telle que :

$$u_5 = 7$$

et de raison :

$$q = -2.$$

On utilise :

$$u_n = u_5 q^{n-5}.$$

Donc :

$$u_n = 7(-2)^{n-5}$$

Par exemple :

$$u_8 = 7(-2)^3 = -56.$$

Attention

Dans :

$$u_n = u_p q^{n-p},$$

l'exposant $n - p$ correspond au nombre de multiplications par q nécessaires pour passer de u_p à u_n .

3) Sens de variation

Propriété

On considère une suite géométrique dont le premier terme est **strictement positif**.

- Si $q > 1$, la suite est **strictement croissante**.
- Si $0 < q < 1$, la suite est **strictement décroissante**.
- Si $q = 1$, la suite est **constante**.
- Si $q < 0$, les termes changent de signe : la suite n'est pas monotone.

Remarque

Si le premier terme est strictement négatif :

- pour $q > 1$, la suite est strictement décroissante ;
- pour $0 < q < 1$, la suite est strictement croissante.

Exemple

Si :

$$u_0 = 5 \quad \text{et} \quad q = 2,$$

alors $u_0 > 0$ et $q > 1$.

La suite (u_n) est donc :

strictement croissante.

4) Représentation graphique

Propriété

Une suite géométrique (u_n) est représentée par les points de coordonnées :

$$(n; u_n).$$

Attention

Une suite est représentée par des **points isolés**.

On ne représente que les indices entiers :

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

On ne trace donc pas une courbe continue.

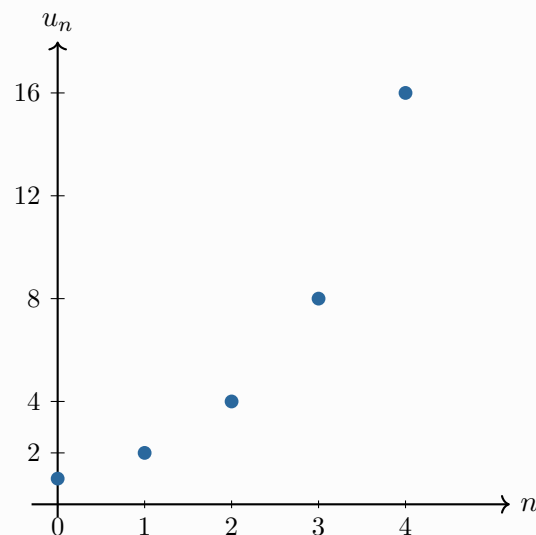
Exemple

On considère :

$$u_n = 2^n.$$

Les premiers termes sont :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 4, \quad u_3 = 8, \quad u_4 = 16.$$



5) Somme de puissances successives

Propriété

Pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier naturel n :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque

La somme :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

contient :

$$\boxed{n + 1}$$

termes.

Exemple

Calculons :

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024.$$

Comme :

$$1024 = 2^{10},$$

on a :

$$S = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}.$$

Donc :

$$S = \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2047.$$

Ainsi :

$$\boxed{S = 2047}.$$

6) Somme de termes consécutifs

Propriété

Pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$:

$$\boxed{\text{Somme} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}}$$

Propriété

Si :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n,$$

alors il y a $n + 1$ termes et :

$$\boxed{S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Attention

De u_p à u_n , il y a :

$$\boxed{n - p + 1}$$

termes.

Exemple

On considère une suite géométrique de premier terme :

$$u_0 = 2$$

et de raison :

$$q = 3.$$

On veut calculer :

$$S_7 = u_0 + u_1 + \cdots + u_7.$$

Il y a 8 termes.

Donc :

$$S_7 = 2 \frac{1 - 3^8}{1 - 3}.$$

Ainsi :

$$\boxed{S_7 = 6560}.$$

7) Suites arithmético-géométriques

Définition

Une suite (u_n) est **arithmético-géométrique** lorsqu'elle est définie par une relation de la forme :

$$\boxed{u_{n+1} = a u_n + b}$$

où a et b sont deux nombres réels fixes.

Remarque

On retrouve comme cas particuliers :

- une suite arithmétique lorsque $a = 1$;
- une suite géométrique lorsque $b = 0$.

A) Étudier une suite arithmético-géométrique

Exemple – Énoncé

M. Durand place 5 000 euros sur un compte bancaire.

Chaque année :

- le capital augmente de 2,5 % ;
- puis M. Durand verse 2 000 euros supplémentaires.

On note u_n le capital disponible, en euros, au bout de n années.

Ainsi :

$$u_0 = 5\,000.$$

On définit également la suite (v_n) par :

$$v_n = u_n + 80\,000$$

Questions

- 1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- 2) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
- 3) Calculer v_0 , puis exprimer v_n en fonction de n .
- 4) En déduire une expression de u_n en fonction de n .

Exemple – Résolution

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

Une augmentation de 2,5 % correspond au coefficient multiplicateur :

$$1 + \frac{2,5}{100} = 1,025.$$

Après application des intérêts, le capital est donc :

$$1,025u_n.$$

Puis M. Durand verse 2 000 euros supplémentaires.

On obtient :

$$u_{n+1} = 1,025u_n + 2\,000$$

2) Montrer que (v_n) est géométrique

Par définition :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 80\,000.$$

On remplace u_{n+1} par l'expression précédente :

$$v_{n+1} = 1,025u_n + 2\,000 + 80\,000.$$

Donc :

$$v_{n+1} = 1,025u_n + 82\,000.$$

Or :

$$v_n = u_n + 80\,000.$$

Ainsi :

$$u_n = v_n - 80\,000.$$

On remplace u_n :

$$v_{n+1} = 1,025(v_n - 80\,000) + 82\,000.$$

Donc :

$$v_{n+1} = 1,025v_n - 82\,000 + 82\,000.$$

Finalement :

$$v_{n+1} = 1,025v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison :

$$q = 1,025.$$

Exemple – Résolution (suite)

3) Exprimer v_n en fonction de n

On calcule le premier terme :

$$v_0 = u_0 + 80\,000.$$

Donc :

$$v_0 = 5\,000 + 80\,000 = 85\,000.$$

La suite (v_n) est géométrique de premier terme :

$$v_0 = 85\,000$$

et de raison :

$$q = 1,025.$$

On utilise donc la formule :

$$v_n = v_0 q^n.$$

Ainsi :

$$v_n = 85\,000 \times 1,025^n$$

4) Exprimer u_n en fonction de n

On sait que :

$$v_n = u_n + 80\,000.$$

Donc :

$$u_n = v_n - 80\,000.$$

On remplace v_n :

$$u_n = 85\,000 \times 1,025^n - 80\,000.$$

Finalement :

$$u_n = 85\,000 \times 1,025^n - 80\,000$$

Méthode

Dans un exercice sur une suite arithmético-géométrique :

1- On établit d'abord la relation :

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

2- Si une suite auxiliaire (v_n) est donnée, on calcule :

$$v_{n+1}.$$

3- On cherche à obtenir une relation de la forme :

$$v_{n+1} = qv_n.$$

4- On en déduit que (v_n) est géométrique.

5- On exprime v_n en fonction de n .

6- On revient enfin à la suite (u_n) .

8) Rechercher un seuil

Définition

Chercher un **seuil**, c'est chercher le premier indice n à partir duquel une condition est vérifiée.
Par exemple :

$$u_n > A$$

ou :

$$u_n < a.$$

Exemple

On injecte à un patient :

$$2 \text{ cm}^3$$

de médicament.

Chaque heure, la quantité diminue de 12 %.

Le coefficient multiplicateur associé à une diminution de 12 % est :

$$1 - \frac{12}{100} = 0,88.$$

La suite (u_n) est donc géométrique de premier terme :

$$u_0 = 2$$

et de raison :

$$q = 0,88.$$

Ainsi :

$$u_n = 2 \times 0,88^n$$

On cherche le premier entier n tel que :

$$u_n \leq 1.$$

Méthode

Pour rechercher un seuil, on peut utiliser :

- une table de valeurs à la calculatrice ;
- un programme Python ;
- des calculs successifs.

9) Formules à connaître

Méthode

Pour une suite géométrique de raison q :

$$u_{n+1} = q u_n$$

Si $u_n \neq 0$:

$$q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

À partir d'un terme u_p :

$$u_n = u_p q^{n-p}$$

À partir de u_0 :

$$u_n = u_0 q^n$$

Pour une somme de puissances :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

Pour une somme de termes consécutifs :

$$\text{Somme} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Pour une suite arithmético-géométrique :

$$u_{n+1} = a u_n + b$$