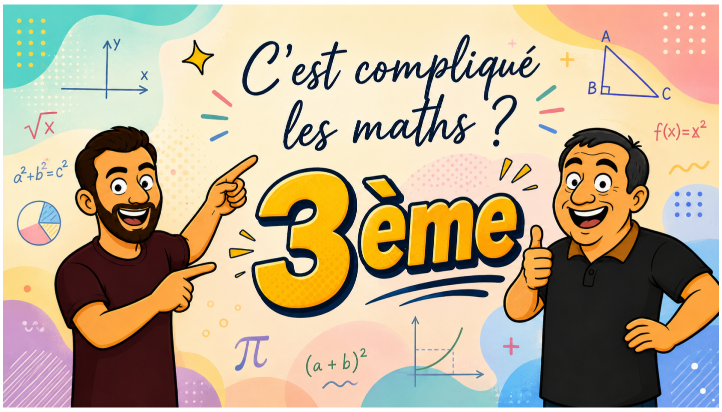

Cours : Équations

1) Connaître la notion d'équation

Définition

Une **équation** est une égalité qui comporte au moins un nombre de valeur inconnue, généralement désigné par une lettre.
Cette égalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue et fausse pour d'autres.

Exemple

L'égalité suivante est une équation d'inconnue x :

$$3 + x = 11$$

Si $x = 8$, alors :

$$3 + x = 3 + 8 = 11$$

L'égalité est vraie.
Si $x = 4$, alors :

$$3 + x = 3 + 4 = 7$$

Or :

$$7 \neq 11$$

L'égalité est donc fausse.

Remarque

L'expression située à gauche du signe égal est appelée le **membre de gauche**.
L'expression située à droite du signe égal est appelée le **membre de droite**.
Lorsque l'égalité est vraie, les deux membres ont la même valeur.

Définition

Une **solution d'une équation** est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie.

Méthode

Pour tester si un nombre est une solution d'une équation d'inconnue x :

- on calcule le membre de gauche en remplaçant x par cette valeur ;

— on calcule le membre de droite en remplaçant x par cette valeur ;

— on compare les deux résultats ;

— on conclut.

Exemples

On considère l'équation :

$$3x + 2 = 4x - 3$$

Testons si 8 est une solution.
Pour $x = 8$, le membre de gauche vaut :

$$3 \times 8 + 2 = 24 + 2 = 26$$

Le membre de droite vaut :

$$4 \times 8 - 3 = 32 - 3 = 29$$

Les deux membres ne sont pas égaux.
Donc 8 n'est pas une solution de l'équation.

Testons si 5 est une solution.
Pour $x = 5$, le membre de gauche vaut :

$$3 \times 5 + 2 = 15 + 2 = 17$$

Le membre de droite vaut :

$$4 \times 5 - 3 = 20 - 3 = 17$$

Les deux membres sont égaux.
Donc 5 est une solution de l'équation.

2) Simplifier une expression littérale

Propriété

Soient a, b et c des nombres quelconques.
Lorsqu'une parenthèse est précédée d'un signe $-$, on change les signes de tous les termes situés dans la parenthèse.

$$\boxed{a - (b + c) = a - b - c}$$

et :

$$\boxed{a - (b - c) = a - b + c}$$

Exemples

Exemple 1

$$\begin{aligned} 3-(2x+1) &= 3-2x-1 \\ &= -2x+2 \end{aligned}$$

Exemple 2

$$\begin{aligned} x-(1-x) &= x-1+x \\ &= 2x-1 \end{aligned}$$

Exemple 3

$$\begin{aligned} x-(-1+x) &= x+1-x \\ &= 1 \end{aligned}$$

Remarque

Lorsqu'on simplifie une expression littérale, on dit également qu'on la **réduit**.

3) Résoudre une équation

Définition

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les solutions de cette équation.

Remarque

Il arrive qu'une équation n'ait aucune solution.
Une équation peut également avoir plusieurs solutions.

Propriété

Une égalité reste vraie lorsqu'on ajoute ou soustrait un même nombre à chacun de ses membres.
Soient a, b et k des nombres.
Si $a = b$, alors :

$$a + k = b + k$$

et :

$$a - k = b - k$$

Exemple

On veut résoudre l'équation :

$$x - 7 = 2$$

On ajoute 7 aux deux membres :

$$x - 7 + 7 = 2 + 7$$

Donc :

$$x = 9$$

On peut vérifier :

$$9 - 7 = 2$$

La solution est :

$$\boxed{x = 9}$$

Exemple

On veut résoudre l'équation :

$$5 + x = 1$$

On soustrait 5 aux deux membres :

$$5 + x - 5 = 1 - 5$$

Donc :

$$x = -4$$

On peut vérifier :

$$5 + (-4) = 1$$

La solution est :

$$\boxed{x = -4}$$

Propriété

Une égalité reste vraie lorsqu'on multiplie ou divise chacun de ses membres par un même nombre non nul.
Soient a, b et k des nombres, avec $k \neq 0$.
Si $a = b$, alors :

$$a \times k = b \times k$$

et :

$$\frac{a}{k} = \frac{b}{k}$$

Exemple

On veut résoudre l'équation :

$$\frac{x}{2} = 5$$

On multiplie les deux membres par 2 :

$$\frac{x}{2} \times 2 = 5 \times 2$$

Donc :

$$x = 10$$

On peut vérifier :

$$\frac{10}{2} = 5$$

La solution est :

$$\boxed{x = 10}$$

Exemple

On veut résoudre l'équation :

$$3x = -1$$

On divise les deux membres par 3 :

$$\frac{3x}{3} = \frac{-1}{3}$$

Donc :

$$x = -\frac{1}{3}$$

On peut vérifier :

$$3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$

La solution est :

$$\boxed{x = -\frac{1}{3}}$$

Méthode

Pour résoudre une équation comportant plusieurs opérations :

1- On simplifie chaque membre si cela est nécessaire.

2- On rassemble les termes comportant x dans un même membre.

3- On rassemble les nombres dans l'autre membre.

4- On isole x.

5- On vérifie éventuellement la solution obtenue.

Exemple

On veut résoudre l'équation :

$$3x + 2 = 4x - 3$$

On soustrait $3x$ aux deux membres :

$$3x + 2 - 3x = 4x - 3 - 3x$$

Donc :

$$2 = x - 3$$

On ajoute 3 aux deux membres :

$$2 + 3 = x - 3 + 3$$

Donc :

$$5 = x$$

Ainsi :

$$x = 5$$

On peut vérifier :

$$3 \times 5 + 2 = 17$$

et :

$$4 \times 5 - 3 = 17$$

La solution est :

$$\boxed{x = 5}$$

Remarque

Après avoir résolu une équation, on peut vérifier le résultat en remplaçant l'inconnue par la valeur trouvée dans l'équation de départ.

4) Modéliser une situation par une équation

Méthode

Pour modéliser une situation à l'aide d'une équation, on suit les étapes suivantes :

1- Choix de l'inconnue
On choisit l'inconnue, généralement notée x, qui désigne ce que l'on cherche.

2- Mise en équation
On traduit les données de l'énoncé par une équation.

3- Résolution
On résout l'équation en utilisant les propriétés du cours.

4- Conclusion
On interprète le résultat en rédigeant une phrase réponse.

Exemple

Léa a acheté 19 bonbons de trois parfums différents : à la fraise, à la réglisse et à la menthe.
Elle possède 4 bonbons à la menthe et deux fois plus de bonbons à la réglisse qu'à la fraise.
Combien possède-t-elle de bonbons à la fraise ?

1- Choix de l'inconnue
On appelle x le nombre de bonbons à la fraise.

2- Mise en équation
Le nombre de bonbons à la réglisse est égal à :

$$2x$$

Le nombre de bonbons à la menthe est égal à 4.
Le nombre total de bonbons est donc :

$$x + 2x + 4$$

Or Léa possède 19 bonbons.
On obtient l'équation :

$$x + 2x + 4 = 19$$

3- Résolution
On réduit le membre de gauche :

$$3x + 4 = 19$$

On soustrait 4 aux deux membres :

$$3x + 4 - 4 = 19 - 4$$

$$3x = 15$$

On divise les deux membres par 3 :

$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$$

$$x = 5$$

4- Conclusion
Léa possède donc **5 bonbons à la fraise**.

Remarque

On peut vérifier la solution :

- 5 bonbons à la fraise ;
- $2 \times 5 = 10$ bonbons à la réglisse ;
- 4 bonbons à la menthe.

Le nombre total de bonbons est bien :

$$5 + 10 + 4 = 19$$

5) Résoudre une équation produit nul

Définition

Une équation écrite sous la forme d'un produit égal à zéro est appelée une **équation produit nul**.

Propriété

Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.
Soient a et b deux nombres.

$$\boxed{a \times b = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0}$$

Méthode

Pour résoudre une équation produit nul :

1- On vérifie que l'équation est écrite sous la forme d'un produit égal à zéro.

2- On écrit que l'un des deux facteurs est nul.

3- On résout les deux équations obtenues.

4- On donne toutes les solutions.

Exemple

On veut résoudre l'équation :

$$(3x+4)(2x-3)=0$$

Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.
Donc :

$$3x+4=0 \qquad \text{ou} \qquad 2x-3=0$$

On résout la première équation :

$$\begin{aligned} 3x+4 &= 0 \\ 3x &= -4 \\ x &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

On résout la seconde équation :

$$\begin{aligned} 2x-3 &= 0 \\ 2x &= 3 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Les solutions sont :

$$\boxed{x = -\frac{4}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{2}}$$

Remarque

La propriété du produit nul ne peut être utilisée que lorsque l'un des membres de l'équation est un produit et que l'autre membre est égal à zéro.
Par exemple, on ne peut pas l'utiliser directement avec :

$$(x+2)(x-5)=7$$

Méthode

Lorsqu'une équation n'est pas directement écrite sous la forme d'un produit nul, il peut être nécessaire de factoriser une expression avant d'appliquer la propriété du produit nul.

Exemple

On veut résoudre l'équation :

$$x^2 + 7x = 0$$

On factorise le membre de gauche par x :

$$x(x+7) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.
Donc :

$$x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x + 7 = 0$$

La seconde équation donne :

$$x = -7$$

Les solutions sont :

$$\boxed{x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -7}$$

Exemple

On veut résoudre l'équation :

$$x^2 - 16 = 0$$

On reconnaît une différence de deux carrés :

$$x^2 - 4^2 = 0$$

On factorise à l'aide de l'identité remarquable :

$$(x+4)(x-4) = 0$$

Donc :

$$x + 4 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x - 4 = 0$$

Ainsi :

$$x = -4 \qquad \text{ou} \qquad x = 4$$

Les solutions sont :

$$\boxed{x = -4 \quad \text{ou} \quad x = 4}$$