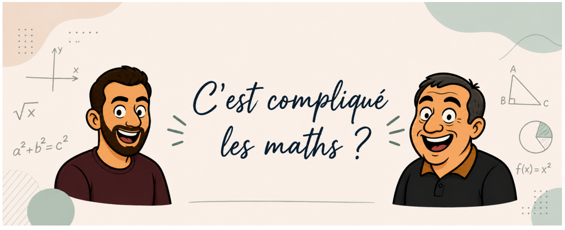

Chapitre : Probabilités

1) Langage des probabilités

A) Expérience aléatoire

Définitions

Une **expérience aléatoire** est une expérience dépendant du hasard dont on peut décrire tous les résultats possibles sans savoir lequel va se produire.
Chaque résultat possible est appelé une **issue**.

Exemple

On tire une boule au hasard dans un sac contenant une boule rouge, une boule bleue, une boule verte et une boule jaune.
Cette expérience est une expérience aléatoire.
Les issues possibles sont :

rouge ; bleue ; verte ; jaune.

B) Événement

Définitions

— Un **événement** est un ensemble d'une ou plusieurs issues.
— Un événement constitué d'une seule issue est un **événement élémentaire**.
— Un événement toujours réalisé est un **événement certain**.
— Un événement jamais réalisé est un **événement impossible**.
— L'**événement contraire** d'un événement A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des issues qui n'appartiennent pas à A.

Exemple

On choisit au hasard un mois de l'année.
On considère les événements suivants :
— A : « obtenir un mois qui commence par la lettre J ».
— B : « obtenir le mois de mars ».
— C : « obtenir un mois de l'année ».
— D : « obtenir un mois qui contient 40 jours ».
Alors :
— A est un événement : $A = \{\text{janvier} ; \text{juin} ; \text{juillet}\}$.
— B est un événement élémentaire.
— C est un événement certain.
— D est un événement impossible.
L'événement contraire de A est :

$$\overline{A} = \{\text{février} ; \text{mars} ; \text{avril} ; \text{mai} ; \text{août} ; \text{septembre} ; \text{octobre} ; \text{novembre} ; \text{décembre}\}.$$

2) Calculs de probabilités

A) Probabilité d'un événement

Définition

La **probabilité** d'un événement A, notée $P(A)$, est un nombre compris entre 0 et 1 qui exprime ses chances de réalisation.

Propriétés

- La probabilité d'un événement impossible est égale à 0.
- La probabilité d'un événement certain est égale à 1.
- La somme des probabilités de toutes les issues d'une expérience aléatoire est égale à 1.

Exemple

On lance une roue partagée en quatre secteurs colorés : rouge, bleu, vert et jaune.
Les probabilités d'obtenir les différentes couleurs sont :

$$P(\text{rouge}) = 0{,}25, \quad P(\text{bleu}) = 0{,}25, \quad P(\text{vert}) = 0{,}30, \quad P(\text{jaune}) = 0{,}20.$$

On vérifie que :

$$0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}30 + 0{,}20 = 1.$$

La probabilité d'obtenir une couleur inexistante, par exemple violet, est égale à 0.

B) Équiprobabilité

Définition

Lorsque les issues d'une expérience aléatoire ont toutes autant de chances de se réaliser, on dit que les issues sont **équiprobables**.

Propriété

En cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement E s'obtient en divisant le nombre d'issues favorables à l'événement par le nombre total d'issues :

$$P(E) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}}.$$

Exemple

On lance une pièce équilibrée deux fois de suite.
Les issues possibles sont :

$$PP, \quad PF, \quad FP, \quad FF.$$

On considère l'événement E : « obtenir exactement une fois pile ».
Les issues favorables sont :

$$PF \quad \text{et} \quad FP.$$

Il y a donc 2 issues favorables sur 4 issues possibles. Ainsi :

$$P(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Exemple

On tire au hasard une carte dans un jeu contenant les nombres :

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10.$$

On considère l'événement A : « obtenir un nombre supérieur ou égal à 7 ».
Les issues favorables sont :

$$7;\ 8;\ 9;\ 10.$$

Il y a 4 issues favorables sur 10 issues possibles. Donc :

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Remarque

La probabilité d'un événement s'exprime souvent sous la forme d'une fraction, mais on peut aussi l'écrire sous forme décimale ou en pourcentage.

C) Probabilité d'événements contraires

Propriété

La somme des probabilités d'un événement A et de son événement contraire $\overline{A}$ est égale à 1 :

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

On peut donc écrire :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Exemple

Dans une boîte, il y a 12 jetons numérotés de 1 à 12.
On tire un jeton au hasard et on considère l'événement A : « obtenir un nombre pair ».
Les issues favorables à A sont :

$$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12.$$

Donc :

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

L'événement contraire $\overline{A}$ est : « obtenir un nombre impair ».
On peut calculer directement :

$$P(\overline{A}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

On peut aussi utiliser la formule :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exemple

Dans une classe de 25 élèves, 18 élèves ont rendu leur devoir.
On choisit un élève au hasard.
On note A l'événement : « l'élève choisi a rendu son devoir ».
Alors :

$$P(A) = \frac{18}{25}.$$

L'événement contraire $\overline{A}$ est : « l'élève choisi n'a pas rendu son devoir ».
On utilise la formule :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}.$$

3) Des fréquences aux probabilités

Propriété

Lorsqu'on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement E finit par se stabiliser autour du nombre $P(E)$.

Exemple

On lance une pièce équilibrée un grand nombre de fois et on observe la fréquence d'apparition de « pile ».

Nombre de lancers	20	100	500	1 000	10 000
Fréquence de « pile »	0,60	0,47	0,512	0,493	0,501

Quand le nombre de lancers devient très grand, la fréquence se rapproche de :

$$P(\text{pile}) = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Remarque

Certains logiciels, comme les tableurs ou les programmes informatiques, permettent de simuler la répétition d'un très grand nombre d'expériences aléatoires identiques.