Correction – Théorème de Thalès

Partie 1 : Écrire l'égalité de Thalès

Exercice 1

ABC et ADE sont deux triangles.

Les points A, D, B sont alignés dans cet ordre. Les points A, E, C sont alignés dans cet ordre. Les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Exercice 2

MNP et MRS sont deux triangles.

Les points M, R, N sont alignés dans cet ordre. Les points M, S, P sont alignés dans cet ordre. Les droites (RS) et (NP) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{MR}{MN} = \frac{MS}{MP} = \frac{RS}{NP}$$

Exercice 3

1. PQR et PAB sont deux triangles.
   Les points P, A, Q sont alignés dans cet ordre. Les points P, B, R sont alignés dans cet ordre. Les droites (AB) et (QR) sont parallèles.
   D'après le théorème de Thalès :
   $$\frac{PA}{PQ} = \frac{PB}{PR} = \frac{AB}{QR}.$$
2. OEF et OCD sont deux triangles.
   Les points O, C, E sont alignés dans cet ordre. Les points O, D, F sont alignés dans cet ordre. Les droites (CD) et (EF) sont parallèles.
   D'après le théorème de Thalès :
   $$\frac{OC}{OE} = \frac{OD}{OF} = \frac{CD}{EF}.$$
3. STU et SMN sont deux triangles.
   Les points S, M, T sont alignés dans cet ordre. Les points S, N, U sont alignés dans cet ordre. Les droites (MN) et (TU) sont parallèles.
   D'après le théorème de Thalès :
   $$\frac{SM}{ST} = \frac{SN}{SU} = \frac{MN}{TU}.$$

Partie 2 : Rédaction du théorème de Thalès

Exercice 4

ABC et AMN sont deux triangles.
Les points A, M, B sont alignés dans cet ordre. Les points A, N, C sont alignés dans cet ordre. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Or :

$$AM = 2{,}8 \text{ cm} \qquad AB = 7 \text{ cm} \qquad AC = 8{,}5 \text{ cm}$$

Donc :

$$\frac{2{,}8}{7} = \frac{AN}{8{,}5}$$

On obtient :

$$AN = \frac{2{,}8 \times 8{,}5}{7} = 3{,}4$$

Ainsi :

$$\boxed{AN = 3{,}4 \text{ cm}}$$

Exercice 5

EFG et EHI sont deux triangles.
Les points E, H, F sont alignés dans cet ordre. Les points E, I, G sont alignés dans cet ordre. Les droites (HI) et (FG) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{EH}{EF} = \frac{EI}{EG} = \frac{HI}{FG}$$

Or :

$$EF = EH + HF = 3 + 5 = 8$$

Donc :

$$\frac{3}{8} = \frac{2{,}4}{EG} = \frac{HI}{9{,}6}$$

On obtient :

$$EG = \frac{8 \times 2{,}4}{3} = 6{,}4$$

Puis :

$$HI = \frac{3 \times 9{,}6}{8} = 3{,}6$$

Ainsi :

$$\boxed{EG = 6{,}4 \text{ cm}} \qquad \boxed{HI = 3{,}6 \text{ cm}}$$

Exercice 6

Les droites (DE) et (BC) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (AB).
Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.
Donc :

$$(DE)//(BC)$$

ABC et ADE sont deux triangles.
Les points A, D, B sont alignés dans cet ordre. Les points A, E, C sont alignés dans cet ordre. Les droites (DE) et (BC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Or :

$$AD = 2{,}4 \text{ cm} \qquad AB = 6 \text{ cm} \qquad AC = 7{,}5 \text{ cm}$$

Donc :

$$\frac{2{,}4}{6} = \frac{AE}{7{,}5}$$

On obtient :

$$AE = \frac{2{,}4 \times 7{,}5}{6} = 3$$

Ainsi :

$$\boxed{AE = 3 \text{ cm}}$$

Exercice 7

Les droites (MP) et (NQ) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (LN).
Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.
Donc :

$$(MP)//(NQ)$$

LNQ et LMP sont deux triangles.
Les points L, M, N sont alignés dans cet ordre. Les points L, P, Q sont alignés dans cet ordre. Les droites (MP) et (NQ) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{LM}{LN} = \frac{LP}{LQ} = \frac{MP}{NQ}$$

Or :

$$LM = 3 \text{ cm} \qquad LN = 8 \text{ cm} \qquad NQ = 5{,}6 \text{ cm}$$

Donc :

$$\frac{3}{8} = \frac{MP}{5{,}6}$$

On obtient :

$$MP = \frac{3 \times 5{,}6}{8} = 2{,}1$$

Ainsi :

$$\boxed{MP = 2{,}1 \text{ cm}}$$

Exercice 8

ABC et ARS sont deux triangles.
Les points A, R, B sont alignés dans cet ordre. Les points A, S, C sont alignés dans cet ordre. Les droites (RS) et (BC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AR}{AB} = \frac{AS}{AC} = \frac{RS}{BC}$$

Or :

$$AR = 7{,}2 \text{ cm} \qquad AB = 12 \text{ cm} \qquad AC = 10 \text{ cm} \qquad RS = 4{,}5 \text{ cm}$$

Donc :

$$\frac{7{,}2}{12} = \frac{AS}{10} = \frac{4{,}5}{BC}$$

On obtient :

$$AS = \frac{7{,}2 \times 10}{12} = 6$$

Puis :

$$BC = \frac{12 \times 4{,}5}{7{,}2} = 7{,}5$$

Ainsi :

$$\boxed{AS = 6 \text{ cm}} \qquad \boxed{BC = 7{,}5 \text{ cm}}$$

Partie 3 : Exercices bilan

Exercice 9

Les droites (BP) et (AT) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (SA).
Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.
Donc :

$$(BP)//(AT)$$

On calcule d'abord :

$$SA = SB + BA = 1{,}8 + 7{,}2 = 9$$

SAT et SBP sont deux triangles.
Les points S, B, A sont alignés dans cet ordre. Les points S, P, T sont alignés dans cet ordre. Les droites (BP) et (AT) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{SB}{SA} = \frac{SP}{ST} = \frac{BP}{AT}$$

Or :

$$SB = 1{,}8 \text{ m} \qquad SA = 9 \text{ m} \qquad BP = 1{,}40 \text{ m}$$

Donc :

$$\frac{1{,}8}{9} = \frac{1{,}40}{AT}$$

On obtient :

$$AT = \frac{9 \times 1{,}40}{1{,}8} = 7$$

Ainsi, la hauteur de l'arbre est :

$$\boxed{7 \text{ m}}$$

Exercice 10

ABC et AMN sont deux triangles.
Les points A, M, B sont alignés dans cet ordre. Les points A, N, C sont alignés dans cet ordre. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Or :

$$AB = AM + MB = 4{,}4 + 3{,}6 = 8$$

Donc :

$$\frac{4{,}4}{8} = \frac{3{,}3}{AC} = \frac{2{,}75}{BC}$$

On obtient :

$$AC = \frac{8 \times 3{,}3}{4{,}4} = 6$$

Puis :

$$BC = \frac{8 \times 2{,}75}{4{,}4} = 5$$

Ainsi :

$$\boxed{AB = 8 \text{ cm}} \qquad \boxed{AC = 6 \text{ cm}} \qquad \boxed{BC = 5 \text{ cm}}$$

Exercice 11

ABC et AMN sont deux triangles.
Les points A, M, B sont alignés dans cet ordre. Les points A, N, C sont alignés dans cet ordre. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Or :

$$AB = AM + MB = 6 + 4 = 10$$

Donc :

$$\frac{6}{10} = \frac{4{,}5}{AC} = \frac{3{,}6}{BC}$$

On obtient :

$$AC = \frac{10 \times 4{,}5}{6} = 7{,}5$$

Puis :

$$BC = \frac{10 \times 3{,}6}{6} = 6$$

Ainsi :

$$\boxed{AB = 10 \text{ cm}} \qquad \boxed{AC = 7{,}5 \text{ cm}} \qquad \boxed{BC = 6 \text{ cm}}$$

Le rapport d'agrandissement du triangle AMN vers le triangle ABC est :

$$k = \frac{AB}{AM} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Les aires sont multipliées par le carré du rapport d'agrandissement.
Donc :

$$\mathcal{A}_{ABC} = 10{,}8 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 10{,}8 \times \frac{25}{9} = 30$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{A}_{ABC} = 30 \text{ cm}^2}$$

Le volume du prisme est :

$$V = \mathcal{A}_{ABC} \times h$$

Donc :

$$V = 30 \times 8 = 240$$

Ainsi :

$$\boxed{V = 240 \text{ cm}^3}$$

Exercice 12

ABC et AMN sont deux triangles.
Les points A, M, B sont alignés dans cet ordre. Les points A, N, C sont alignés dans cet ordre. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Or :

$$AB = AM + MB = 240 + 360 = 600$$

Donc :

$$\frac{240}{600} = \frac{264}{AC} = \frac{300}{BC}$$

On obtient :

$$AC = \frac{600 \times 264}{240} = 660$$

Puis :

$$BC = \frac{600 \times 300}{240} = 750$$

Ainsi :

$$\boxed{AB = 600 \text{ m}} \qquad \boxed{AC = 660 \text{ m}} \qquad \boxed{BC = 750 \text{ m}}$$

Le périmètre du parcours ABC est :

$$P = AB + AC + BC$$

Donc :

$$P = 600 + 660 + 750 = 2010$$

Ainsi :

$$\boxed{P = 2010 \text{ m}}$$

Le coureur réalise 21 tours.
Donc la distance totale parcourue est :

$$21 \times 2010 = 42\,210 \text{ m}$$

Or :

$$42\,210 \text{ m} = 42{,}210 \text{ km}$$

La distance officielle d'un marathon est 42,195 km.
Donc :

$$42{,}210 - 42{,}195 = 0{,}015 \text{ km}$$

Or :

$$0{,}015 \text{ km} = 15 \text{ m}$$

Le coureur a donc parcouru :

$$\boxed{15 \text{ m de plus qu'un marathon}}$$

Le temps mis est :

$$3 \text{ h } 30 \text{ min} = 3{,}5 \text{ h}$$

La vitesse moyenne est :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{42{,}210}{3{,}5} \approx 12{,}1$$

Ainsi :

$$\boxed{v \approx 12{,}1 \text{ km/h}}$$