



Cours : Transformations

1) Rappels sur les transformations

A) Symétrie axiale

Définition

Soit une droite (d) .

Le symétrique d'un point A par rapport à la droite (d) est le point A' tel que la droite (d) est la médiatrice du segment $[AA']$.

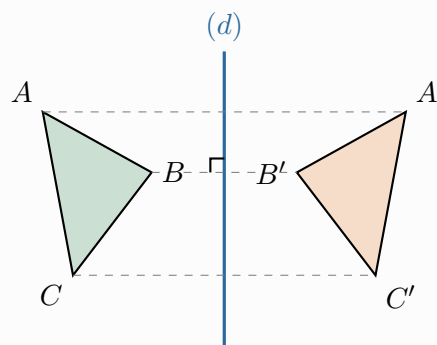
Cela signifie que :

- (d) est perpendiculaire à $[AA']$;
- (d) passe par le milieu de $[AA']$.

Si un point appartient à la droite (d) , alors son symétrique est lui-même.

Exemple

Le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par la symétrie axiale d'axe (d) .



Propriété

Deux figures symétriques par rapport à une droite sont superposables lorsqu'on plie la feuille le long de cette droite.

La droite est appelée l'axe de symétrie.

B) Symétrie centrale

Définition

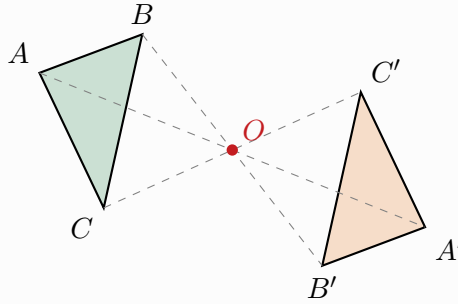
Soit O un point.

Le symétrique d'un point C par rapport au point O est le point C' tel que O est le milieu du segment $[CC']$.

Le symétrique du point O par rapport à lui-même est O .

Exemple

Le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par la symétrie centrale de centre O .



Propriété

Deux figures symétriques par rapport à un point O sont superposables après un demi-tour autour du point O .

Propriétés

Les symétries axiale et centrale conservent :

- les alignements ;
- les mesures des angles ;
- les longueurs ;
- les aires.

C) Translation

Définition

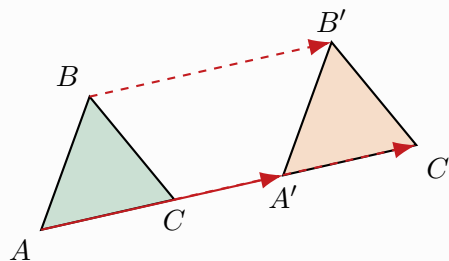
Transformer une figure par translation, c'est la faire glisser selon :

- une direction ;
- un sens ;
- une longueur.

Ce glissement peut être représenté par une flèche appelée **vecteur**.

Exemple

Le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par la translation qui transforme A en A' .



Propriété

La translation conserve les alignements, les mesures des angles, les longueurs et les aires.

D) Rotation

Définition

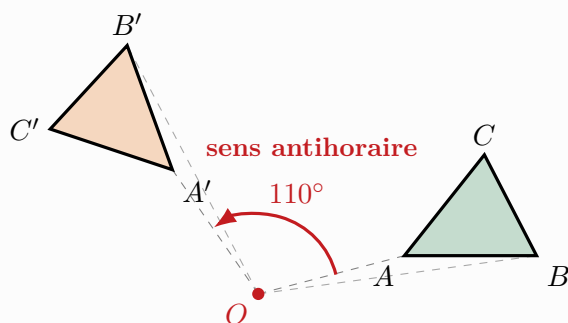
Transformer une figure par rotation, c'est la faire tourner autour d'un point.

Une rotation est définie par :

- un point appelé **centre** ;
- un **angle de rotation** ;
- un **sens de rotation** : horaire ou antihoraire.

Exemple

Le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par la rotation de centre O , d'angle 110° , dans le sens antihoraire.



Les points A et A' sont à la même distance du centre O . Il en est de même pour B et B' , puis pour C et C' .

Remarque

La rotation de centre O et d'angle 180° est la symétrie centrale de centre O .

Propriétés

Une figure et son image par une rotation sont superposables.

La rotation conserve les alignements, les mesures des angles, les longueurs et les aires.

2) Transformer une figure par homothétie

Définition

Soit O un point.

Transformer une figure par une **homothétie de centre O et de rapport k** , c'est l'agrandir ou la réduire en déplaçant ses points le long de droites passant par O .

Le rapport k est un nombre non nul.

Propriété

Si A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport k , alors les points O , A et A' sont alignés.

- Si $k > 0$, A et A' sont du même côté de O .
- Si $k < 0$, A et A' sont de part et d'autre de O .
- Si $k > 0$, la distance OA' est égale à $k \times OA$.
- Si $k < 0$, la distance OA' est égale à $(-k) \times OA$.

Méthode

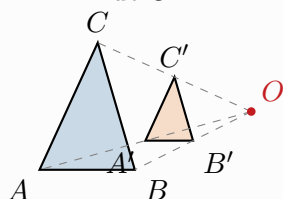
Pour reconnaître l'effet d'une homothétie de rapport k :

Valeur de k	Effet	Position de l'image
$0 < k < 1$	réduction	même côté de O
$k > 1$	agrandissement	même côté de O
$-1 < k < 0$	réduction	autre côté de O , image retournée
$k < -1$	agrandissement	autre côté de O , image retournée

Exemples

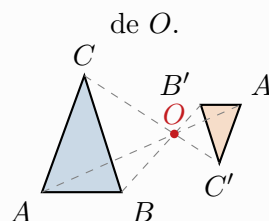
Rapport $k = 0,5$

L'image est une réduction située du même côté de O .



Rapport $k = -0,5$

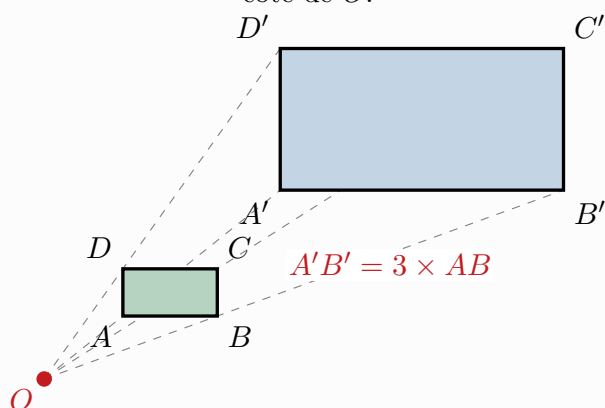
L'image est une réduction située de l'autre côté de O .



Exemples

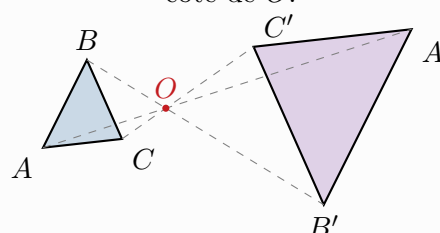
Rapport $k = 3$

L'image est un agrandissement situé du même côté de O .



Rapport $k = -2$

L'image est un agrandissement situé de l'autre côté de O .



Remarque

L'homothétie de centre O et de rapport -1 est la symétrie centrale de centre O .

Propriétés

Une figure et son image par une homothétie ont la même forme.

L'homothétie conserve les alignements et les mesures des angles.

Pour une homothétie de rapport k :

- si $k > 0$, les longueurs sont multipliées par k ;
- si $k < 0$, les longueurs sont multipliées par $-k$;
- les aires sont multipliées par k^2 ;
- si $k > 0$, les volumes sont multipliés par k^3 ;
- si $k < 0$, les volumes sont multipliés par $(-k)^3$.

Dans tous les cas, le nombre utilisé pour multiplier une longueur, une aire ou un volume est positif.

Exemple

Un rectangle $ABCD$ a pour image le rectangle $A'B'C'D'$ par une homothétie de rapport $k = 3$.
On sait que :

$$AB = 2 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{ABCD} = 2 \text{ cm}^2$$

La longueur de l'image est :

$$A'B' = 3 \times AB = 3 \times 2 = 6 \text{ cm}$$

L'aire de l'image est :

$$\mathcal{A}_{A'B'C'D'} = 3^2 \times 2 = 9 \times 2 = 18 \text{ cm}^2$$

Exemple

Un triangle a un périmètre de 14 cm. Son image par une homothétie de rapport -2 a pour périmètre :
Le rapport étant négatif, les longueurs sont multipliées par $-(-2) = 2$.

$$14 \times 2 = 28 \text{ cm}$$

3) Frises, pavages et rosaces

Définitions

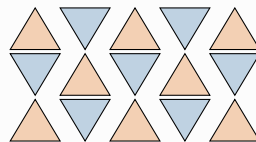
- Une **frise** est constituée d'un motif reproduit dans une seule direction par translation.
- Un **pavage** est constitué d'un motif reproduit dans deux directions par translations, afin de recouvrir le plan sans trou ni superposition.
- Une **rosace** est constituée d'un motif reproduit plusieurs fois par rotation.

Exemples

Une frise



Un pavage



Une rosace

