



Feuille d'exercices Dérivation

Partie 1 : Taux de variation et sécantes

Exercice 1 – Calculer un taux de variation

Compétence(s) : Calculer

Difficulté : ★ ○ ○

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

1. Calculer $f(1)$ et $f(3)$.
2. Calculer le taux de variation de f entre 1 et 3.
3. Calculer le taux de variation de f entre 1 et 2.
4. Interpréter graphiquement les deux résultats obtenus.

Exercice 2 – Un taux de variation avec un paramètre

Compétence(s) : Calculer, raisonner

Difficulté : ★ ★ ○

On considère la fonction :

$$f(x) = x^2 - 4x + 1.$$

1. Calculer $f(2)$.
2. Développer et réduire $f(2 + h)$.
3. Montrer que, pour $h \neq 0$:

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = h.$$

4. Calculer ce taux de variation pour :

$$h = 1, \quad h = 0,1, \quad h = 0,01.$$

5. Vers quelle valeur semble tendre ce taux lorsque h tend vers 0 ?

Exercice 3 – Sécantes à une courbe

Compétence(s) : Calculer, représenter, raisonner

Difficulté : ★ ★ ○

On considère la fonction :

$$f(x) = x^2.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

On considère les points :

$$A(1; f(1))$$

et, pour $h \neq 0$:

$$B_h(1 + h; f(1 + h)).$$

1. Déterminer les coordonnées de A .
2. Déterminer les coordonnées de B_h pour $h = 2$, puis pour $h = 1$.
3. Calculer le coefficient directeur de la droite (AB_h) en fonction de h .
4. Vers quelle valeur tend ce coefficient directeur lorsque h tend vers 0 ?
5. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Partie 2 : Nombre dérivé et tangentes

Exercice 4 – Déterminer un nombre dérivé

Compétence(s) : Calculer, raisonner

Difficulté : ★ ○ ○

On considère la fonction :

$$f(x) = 3x^2 + 1.$$

1. Calculer $f(1)$.
2. Développer $f(1 + h)$.
3. Simplifier, pour $h \neq 0$:

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h}.$$

4. En déduire le nombre dérivé $f'(1)$.
5. Interpréter graphiquement ce nombre.

Exercice 5 – Un nombre dérivé négatif

Compétence(s) : Calculer, raisonner

Difficulté : ★ ★ ○

On considère :

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 4.$$

1. Calculer $f(2)$.
2. Développer et réduire $f(2 + h)$.
3. Montrer que, pour $h \neq 0$:

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = -5 - 2h.$$

4. En déduire $f'(2)$.
5. Que peut-on dire de la pente de la tangente au point d'abscisse 2 ?

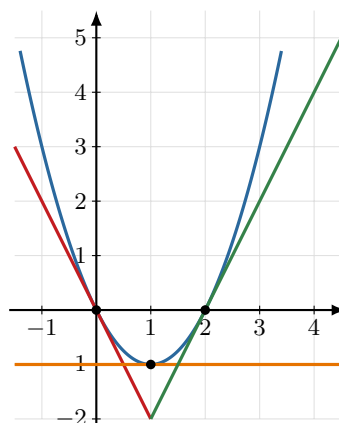
Exercice 6 – Lire graphiquement des nombres dérivés

Compétence(s) : Représenter, communiquer

Difficulté : ★ ○ ○

On considère la courbe représentative d'une fonction f .

Les trois droites colorées sont des tangentes à cette courbe.



1. Déterminer graphiquement $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.
2. Déterminer le coefficient directeur de chacune des trois tangentes.
3. En déduire :

$$f'(0), \quad f'(1), \quad f'(2).$$

4. En quel point la tangente est-elle horizontale ?
5. Que vaut alors le nombre dérivé ?

Exercice 7 – Construire une tangente

Compétence(s) : Représenter, calculer

Difficulté : ★ ★ ○

On considère une fonction f dérivable.

On sait que :

$$f(2) = 3 \quad \text{et} \quad f'(2) = -2.$$

1. Donner les coordonnées du point A de la courbe d'abscisse 2.
2. Interpréter graphiquement $f'(2)$.
3. Placer le point A dans un repère.
4. Construire la tangente à la courbe au point A .
5. Donner les coordonnées d'un deuxième point appartenant à cette tangente.

Partie 3 : Équations de tangentes

Exercice 8 – Une première équation de tangente

Compétence(s) : Calculer

Difficulté : ★ ○ ○

On considère :

$$f(x) = x^2 + 3x - 2.$$

On rappelle que :

$$f'(x) = 2x + 3.$$

1. Calculer $f(1)$.
2. Calculer $f'(1)$.
3. Rappeler la formule donnant l'équation de la tangente au point d'abscisse a .
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1.
5. Vérifier que le point $A(1; 2)$ appartient à cette tangente.

Exercice 9 – Plusieurs tangentes à une même courbe

Compétence(s) : Calculer, raisonner

Difficulté : ★ ★ ○

On considère :

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

On admet que :

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

1. Calculer $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse -1 .
3. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.
4. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.
5. Montrer que les tangentes aux points d'abscisses -1 et 1 sont parallèles.

Exercice 10 – Une tangente parallèle à une droite

Compétence(s) : Calculer, raisonner

Difficulté : ★ ★ ★

On considère :

$$f(x) = x^2 - 4x + 5.$$

On sait que :

$$f'(x) = 2x - 4.$$

On considère également la droite :

$$d : y = 6x - 2.$$

1. Donner le coefficient directeur de d .
2. Expliquer pourquoi une tangente à la courbe de f parallèle à d doit vérifier :

$$f'(a) = 6.$$

3. Déterminer la valeur de a .
4. Calculer $f(a)$.
5. Déterminer l'équation de cette tangente.

Partie 4 : Approximation linéaire

Exercice 11 – Approcher une racine carrée

Compétence(s) : Calculer, raisonner

Difficulté : ★ ★ ○

On considère :

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

On rappelle que, pour $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

1. Calculer $f(9)$.
2. Calculer $f'(9)$.
3. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 9.
4. En utilisant cette tangente, donner une valeur approchée de :

$$\sqrt{9,12}.$$

5. Comparer cette approximation à la valeur donnée par la calculatrice.

Exercice 12 – Approximation d'une fonction

Compétence(s) : Calculer, raisonner

Difficulté : ★ ★ ○

On considère :

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

On rappelle que :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

1. Calculer $f(2)$ et $f'(2)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.
3. Utiliser cette tangente pour approcher :

$$\frac{1}{2,04}.$$

4. Retrouver ce résultat avec la formule :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).$$

5. Expliquer pourquoi cette méthode est surtout pertinente lorsque h est proche de 0.

Partie 5 : Fonctions dérivées usuelles

Exercice 13 – Dériver des fonctions simples

Compétence(s) : Calculer

Difficulté : ★ ○ ○

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^2$

2. $g(x) = x^3$

3. $h(x) = 5x$

4. $k(x) = 7$

5. $p(x) = 4x^2$

6. $q(x) = -3x^3$

7. $r(x) = x^4$

8. $s(x) = -2x^5$

Exercice 14 – Carré, cube, inverse et racine carrée

Compétence(s) : Calculer, communiquer

Difficulté : ★ ★ ○

Pour chaque fonction, préciser son ensemble de définition, l'ensemble sur lequel elle est dérivable, puis déterminer sa dérivée.

1. $f(x) = x^2 + 4$

2. $g(x) = x^3 - 2x$

3. $h(x) = \frac{1}{x}$

4. $k(x) = \sqrt{x}$

5. $p(x) = \frac{3}{x}$

6. $q(x) = 5\sqrt{x}$

Exercice 15 – Dériver des puissances entières

Compétence(s) : Calculer, raisonner

Difficulté : ★ ★ ○

On rappelle que, pour tout entier relatif n :

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

sur tout intervalle où la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable.

Lorsque $n < 0$, cette fonction est définie et dérivable sur :

$$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[.$$

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^6$

2. $g(x) = x^8$

3. $h(x) = x^{-2}$

4. $k(x) = x^{-3}$

5. $p(x) = 4x^5 - 2x^3$

6. $q(x) = 3x^{-2} + 5x$

Pour les fonctions contenant une puissance négative, préciser les valeurs interdites.

Partie 6 : Opérations sur les fonctions dérivables

Exercice 16 – Dérivée d'une somme

Compétence(s) : Calculer

Difficulté : ★ ○ ○

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$
2. $g(x) = -2x^3 + 4x^2 - x + 6$
3. $h(x) = 5x^4 - 3x^2 + 8$
4. $k(x) = x^5 - 2x^3 + 7x$
5. $p(x) = \frac{2}{x} + 3x^2$
6. $q(x) = 4\sqrt{x} - x^2$

Préciser les intervalles sur lesquels les fonctions sont dérivables lorsque cela est nécessaire.

Exercice 17 – Dérivée d'un produit

Compétence(s) : Calculer, raisonner

Difficulté : ★ ★ ○

On rappelle que :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (x + 2)(x^2 + 1)$
2. $g(x) = (3x - 1)(x^2 - 4)$
3. $h(x) = x^2(x^3 + 2)$
4. $k(x) = (x^2 + 3)(2x^2 - 1)$
5. Pour la fonction f , développer d'abord l'expression puis la dériver.
6. Vérifier que les deux méthodes donnent le même résultat.

Exercice 18 – Dérivée d'un quotient

Compétence(s) : Calculer, raisonner

Difficulté : ★ ★ ○

On rappelle que :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Pour chaque fonction :

- préciser son ensemble de définition ;
- déterminer sa dérivée ;
- simplifier le résultat.

1. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$
2. $g(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$
3. $h(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$
4. $k(x) = \frac{x^2-4}{2x+1}$

Exercice 19 – Produit, quotient ou somme ?

Compétence(s) : Calculer, raisonner

Difficulté : ★★★

Pour chacune des fonctions suivantes, choisir une méthode adaptée pour déterminer sa dérivée.

1.

$$f(x) = (2x + 1)(x^3 - 2x)$$

2.

$$g(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 1}$$

3.

$$h(x) = x^2\sqrt{x}$$

4.

$$k(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$$

5.

$$p(x) = \frac{1}{x} + x^3 - 4x$$

Pour chaque fonction, préciser l'ensemble sur lequel elle est dérivable.

Partie 7 : Dérivabilité et valeur absolue

Exercice 20 – La fonction valeur absolue

Compétence(s) : Raisonner, représenter, communiquer

Difficulté : ★★★

On considère la fonction :

$$f(x) = |x|.$$

1. Rappeler l'expression de $f(x)$ sans valeur absolue lorsque :

$$x < 0 \quad \text{et} \quad x \geq 0.$$

2. Représenter graphiquement la fonction f sur $[-3; 3]$.

3. Pour $h > 0$, calculer :

$$\frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

4. Pour $h < 0$, calculer :

$$\frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

5. Comparer les deux résultats.
6. La fonction valeur absolue est-elle dérivable en 0 ? Justifier.
7. Donner une interprétation graphique de cette non-dérivabilité.
8. Déterminer $f'(x)$ pour $x < 0$, puis pour $x > 0$.

Partie 8 : Exercice de synthèse type bac

Exercice 21 – Type bac – Le coût de production

Compétence(s) : Modéliser, calculer, raisonner

Difficulté : ★★★

Une entreprise fabrique des objets.

Le coût total de production, exprimé en centaines d'euros, est modélisé par :

$$C(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 100,$$

où x représente le nombre de centaines d'objets fabriqués.

On étudie cette fonction sur $[0; 10]$.

Partie A – Étude du coût

1. Calculer $C(0)$.
2. Calculer $C(2)$ et $C(5)$.
3. Interpréter $C(5)$ dans le contexte.
4. Calculer le taux de variation de C entre 2 et 5.
5. Interpréter ce taux de variation dans le contexte, en précisant les unités.

Partie B – Dérivation

6. Déterminer $C'(x)$.
7. Calculer $C'(2)$.
8. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de C au point d'abscisse 2.
9. Interpréter $C'(2)$ comme une estimation du coût marginal de production, en précisant son unité.

Partie C – Approximation

10. Utiliser une approximation linéaire pour estimer $C(2,1)$.
11. Calculer la valeur exacte de $C(2,1)$.
12. Comparer les deux résultats.
13. Expliquer l'intérêt de l'approximation linéaire dans cette situation.

Partie 9 : Exercice de synthèse type bac

Exercice 22 – Type bac – Mouvement d'un mobile

Compétence(s) : Modéliser, calculer, raisonner

Difficulté : ★★★

Un mobile se déplace en ligne droite.

Sa position, exprimée en mètres, est donnée à l'instant t , exprimé en secondes, par :

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 2,$$

pour $t \in [0; 5]$.

La vitesse instantanée algébrique est donnée par la dérivée de la fonction position.

Partie A – Position et vitesse moyenne

1. Calculer $s(0)$, $s(1)$ et $s(3)$.
2. Interpréter $s(3)$.
3. Calculer le taux de variation de s entre 0 et 1.
4. Que représente ce taux dans le contexte ?

Partie B – Vitesse instantanée

5. Déterminer $s'(t)$.
6. Calculer $s'(0)$, $s'(1)$ et $s'(3)$.
7. Interpréter chacun de ces résultats.
8. Résoudre l'équation :

$$s'(t) = 0.$$

9. À quels instants la vitesse instantanée est-elle nulle ?
10. Factoriser $s'(t)$ et étudier son signe sur $[0; 5]$.
11. En déduire les intervalles sur lesquels le mobile se déplace dans le sens positif de l'axe et ceux sur lesquels il se déplace dans le sens négatif.

Partie C – Tangente et approximation

12. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de s au point d'abscisse 2.
13. Utiliser une approximation linéaire pour estimer la position du mobile à l'instant $t = 2,05$.
14. Calculer la position exacte à cet instant.
15. Comparer les résultats.
16. Expliquer le lien entre la vitesse instantanée algébrique et la pente de la tangente à la courbe représentant la position.