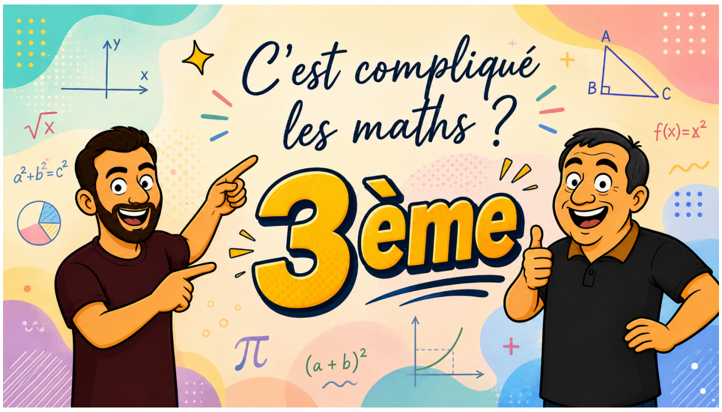


Cours : Probabilités

1) Modéliser une expérience aléatoire

Définition

Une **expérience aléatoire** est une expérience dans laquelle intervient le hasard et dont on ne peut pas prévoir le résultat avec certitude.
Les différents résultats possibles sont appelés les **issues**.

Exemple

Lorsqu'on lance un dé cubique, on ne peut pas prévoir à l'avance le numéro obtenu.
Les issues possibles sont :

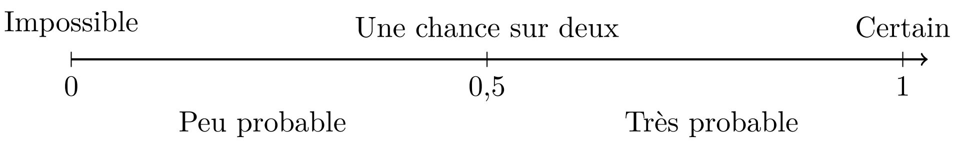
$$1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6$$

Définition

Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer une probabilité à chacune de ses issues de telle sorte que :

— la probabilité de chaque issue soit comprise entre 0 et 1 ;

— la somme des probabilités de toutes les issues soit égale à 1.



Définition

Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'elles sont **équiprobables**.

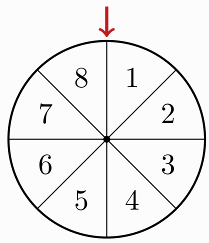
Propriété

Lorsqu'une expérience aléatoire possède n issues équiprobables, la probabilité de chacune de ces issues est égale à :

$$\boxed{\frac{1}{n}}$$

Exemple

On fait tourner une roue équilibrée divisée en huit secteurs de même aire, numérotés de 1 à 8.



Les huit issues sont équiprobables. La probabilité d'obtenir chacun des nombres vaut :

$$\boxed{\frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\,\%}$$

Remarque

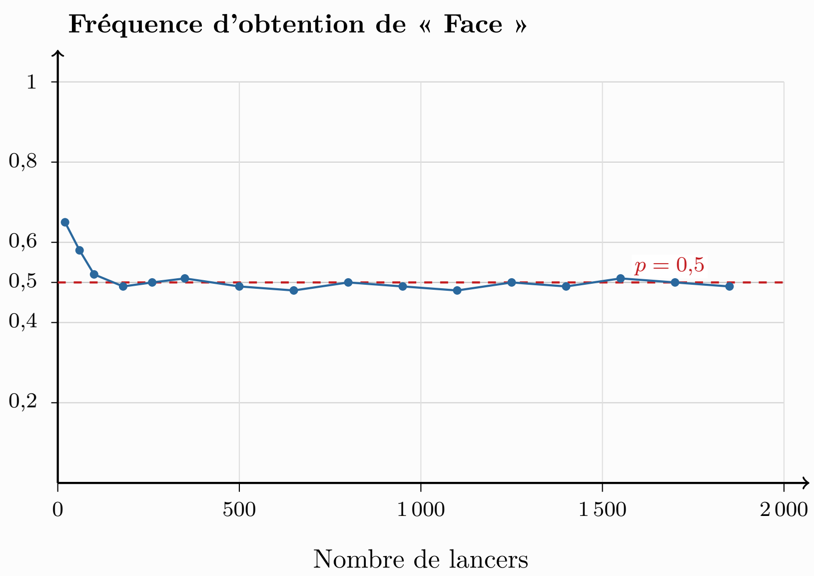
Une probabilité peut être exprimée sous forme de fraction, de nombre décimal ou de pourcentage.

Propriété

Lorsqu'on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une issue se rapproche de la probabilité de cette issue.

Exemple

On lance un grand nombre de fois une pièce équilibrée et on calcule la fréquence d'obtention de « Face ».



La fréquence d'obtention de « Face » se stabilise autour de 0,5, qui est la probabilité d'obtenir « Face ».

2) Déterminer la probabilité d'un événement

Définitions

Un **événement** est constitué d'une ou de plusieurs issues d'une expérience aléatoire.
Selon l'issue obtenue, un événement peut être réalisé ou ne pas être réalisé.
La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

Exemple

On fait tourner une roue équilibrée divisée en huit secteurs portant les lettres :

$$A\,;\,B\,;\,C\,;\,D\,;\,E\,;\,F\,;\,G\,;\,H$$

On note V l'événement « Obtenir une voyelle ».
Les issues qui réalisent V sont A et E.

$$P(V)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

Ainsi :

$$\boxed{P(V)=\frac{1}{4}}$$

Propriété

La probabilité d'un événement est toujours comprise entre 0 et 1.
Pour tout événement A :

$$\boxed{0\leqslant P(A)\leqslant 1}$$

Propriété

Dans une expérience aléatoire où toutes les issues sont équiprobables :

$$\boxed{P(A)=\frac{\text{nombre d'issues qui réalisent } A}{\text{nombre total d'issues}}}$$

Méthode

Pour calculer la probabilité d'un événement dans une situation d'équiprobabilité :

1- On compte le nombre total d'issues.

2- On compte le nombre d'issues qui réalisent l'événement.

3- On divise le nombre d'issues favorables par le nombre total d'issues.

Exemple

On lance un dé cubique équilibré.
On considère l'événement A :

« Obtenir un nombre strictement supérieur à 4. »

Les issues favorables sont 5 et 6.
Il y a donc deux issues favorables parmi six issues possibles.

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ainsi :

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{3}}$$

Définition

L'**événement contraire** d'un événement A est l'événement qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.
Il est noté :

$$\overline{A}$$

Propriété

La somme des probabilités d'un événement et de son événement contraire vaut 1 :

$$\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

On en déduit :

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

Exemple

Avec la roue précédente, l'événement contraire de V est :

« Obtenir une consonne. »

Comme :

$$P(V) = \frac{1}{4}$$

on a :

$$P(\overline{V}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Ainsi :

$$\boxed{P(\overline{V}) = \frac{3}{4}}$$

3) Étudier une expérience aléatoire à deux épreuves

Définition

La succession de deux expériences aléatoires constitue une **expérience aléatoire à deux épreuves**.

Exemple

Une urne contient trois boules numérotées 1, 2 et 3.
On tire une première boule au hasard, on note son numéro, puis on la remet dans l'urne.
On tire ensuite une seconde boule et on note son numéro.
Une issue possible est :

$$(1\,;2)$$

Cela signifie que l'on a obtenu 1 au premier tirage puis 2 au second.

Remarque

Comme la première boule est remise dans l'urne, le résultat du second tirage ne dépend pas du premier.
On dit que les deux épreuves sont **indépendantes**.

Méthode

Pour étudier une expérience aléatoire à deux épreuves, on peut utiliser un **tableau à double entrée**.

Exemple

On reprend l'expérience précédente.

1re boule / 2e boule	**1**	**2**	**3**
1	$(1\,;1)$	$(1\,;2)$	$(1\,;3)$
2	$(2\,;1)$	$(2\,;2)$	$(2\,;3)$
3	$(3\,;1)$	$(3\,;2)$	$(3\,;3)$

Il y a neuf issues possibles, toutes équiprobables.
La probabilité de chacune est donc :

$$\boxed{\frac{1}{9}}$$

Exemple

On considère l'événement A :

« Obtenir deux boules portant le même numéro. »

Les issues favorables sont :

$$(1\,;1), \qquad (2\,;2), \qquad (3\,;3)$$

Il y a trois issues favorables parmi neuf issues possibles.

$$P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Ainsi :

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{3}}$$

Exemple

On considère l'événement B :

« Obtenir deux nombres dont la somme est supérieure ou égale à 4. »

Les issues favorables sont :

$$(1\,;3), \quad (2\,;2), \quad (2\,;3), \quad (3\,;1), \quad (3\,;2), \quad (3\,;3)$$

Il y a six issues favorables parmi neuf issues possibles.

$$P(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Ainsi :

$$\boxed{P(B) = \frac{2}{3}}$$

4) Simuler une expérience aléatoire avec Scratch

Définition

Une **simulation** consiste à reproduire une expérience aléatoire à l'aide d'un programme informatique. Elle permet de répéter rapidement une expérience un grand nombre de fois.

Exemple

On considère le programme suivant :

Quand le drapeau vert est cliqué
Mettre n à un nombre aléatoire entier compris entre 1 et 15.
Si $n < 9$, **alors** mettre A à 1 ; **sinon** mettre A à 0.
Dire la valeur de A.

Le programme annonce 1 lorsque n est compris entre 1 et 8.
Il annonce 0 lorsque n est compris entre 9 et 15.

Exemples

Si $n = 2$, alors $2 < 9$.
Le programme annonce donc :

$$\boxed{1}$$

Si $n = 10$, alors l'affirmation $10 < 9$ est fausse.
Le programme annonce donc :

$$\boxed{0}$$

Exemple

Les issues de l'expérience sont 0 et 1.
L'issue 1 est obtenue pour huit valeurs de n :

$$1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8$$

Donc :

$$\boxed{P(\text{obtenir } 1) = \frac{8}{15}}$$

L'issue 0 est obtenue pour sept valeurs de n :

$$9\,;\,10\,;\,11\,;\,12\,;\,13\,;\,14\,;\,15$$

Donc :

$$\boxed{P(\text{obtenir } 0) = \frac{7}{15}}$$

On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1 :

$$\frac{8}{15} + \frac{7}{15} = \frac{15}{15} = 1$$