



Cours : Équations du second degré

1) Fonctions polynômes du second degré

A) Définition

Définition

Une fonction polynôme du second degré est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a , b et c sont des nombres réels avec :

$$a \neq 0.$$

L'expression $ax^2 + bx + c$ est appelée un **trinôme du second degré**.

Exemple

La fonction :

$$f(x) = x^2 + 2x - 1$$

est un trinôme avec :

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = -1.$$

La fonction :

$$g(x) = (x + 2)^2 - 3$$

est aussi un trinôme car :

$$g(x) = x^2 + 4x + 4 - 3 = x^2 + 4x + 1.$$

Attention

Pour identifier correctement a , b et c , l'expression doit être écrite sous la forme :

$$ax^2 + bx + c.$$

Par exemple :

$$-3x^2 + 5 = -3x^2 + 0x + 5.$$

Donc :

$$a = -3, \quad b = 0, \quad c = 5.$$

B) Parabole

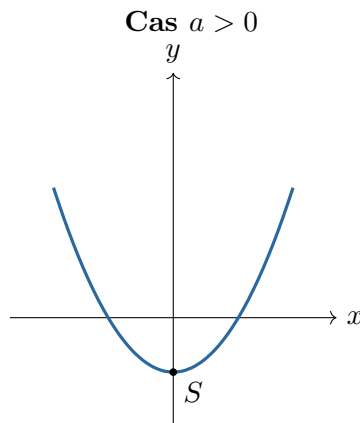
Propriété

La courbe représentative d'une fonction :

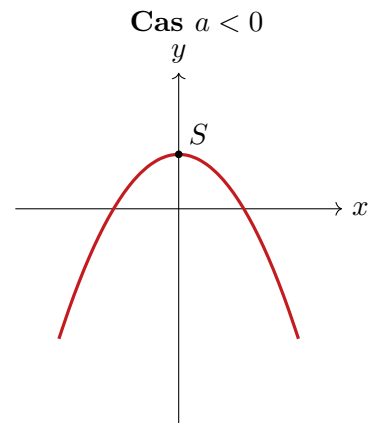
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

est une **parabole**.

- Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut.
- Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas.



minimum



maximum

Propriété

Le sommet de la parabole est noté :

$$S(\alpha; \beta).$$

On a :

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

et :

$$\beta = f(\alpha).$$

La droite :

$$x = \alpha$$

est l'axe de symétrie de la parabole.

Remarque

La parabole coupe toujours l'axe des ordonnées au point :

$$(0; c)$$

car :

$$f(0) = c.$$

En revanche, elle peut couper l'axe des abscisses :

- en deux points ;
- en un seul point ;
- ou ne pas le couper.

2) Forme canonique

Propriété

Toute fonction du second degré :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha).$$

Cette écriture est appelée la **forme canonique**.

Remarque

La forme canonique permet de lire directement les coordonnées du sommet :

$$S(\alpha; \beta).$$

Méthode

Pour obtenir la forme canonique d'un trinôme :

1- On calcule :

$$\alpha = -\frac{b}{2a}.$$

2- On calcule :

$$\beta = f(\alpha).$$

3- On écrit :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Exemple

Soit :

$$f(x) = 2x^2 + 8x - 1.$$

On a :

$$a = 2, \quad b = 8.$$

Calculons α :

$$\alpha = -\frac{8}{2 \times 2} = -2.$$

Puis :

$$\beta = f(-2) = 2(-2)^2 + 8(-2) - 1.$$

Donc :

$$\beta = 8 - 16 - 1 = -9.$$

La forme canonique est donc :

$$f(x) = 2(x + 2)^2 - 9.$$

Le sommet de la parabole est :

$$S(-2; -9).$$

3) Minimum et maximum

Propriété

Soit :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Comme :

$$(x - \alpha)^2 \geq 0,$$

le signe de a permet de connaître l'extremum.

— Si $a > 0$, f admet un **minimum** égal à :

$$\beta$$

atteint pour :

$$x = \alpha.$$

— Si $a < 0$, f admet un **maximum** égal à :

$$\beta$$

atteint pour :

$$x = \alpha.$$

Exemple

On considère :

$$f(x) = -2(x - 5)^2 + 3.$$

On lit :

$$a = -2, \quad \alpha = 5, \quad \beta = 3.$$

Comme :

$$a < 0,$$

la parabole est tournée vers le bas.

La fonction admet donc un maximum égal à :

$$\boxed{3}$$

atteint pour :

$$\boxed{x = 5}.$$

Exemple

On considère :

$$g(x) = 4(x + 1)^2 - 2.$$

On écrit :

$$g(x) = 4(x - (-1))^2 - 2.$$

Ainsi :

$$\alpha = -1 \quad \text{et} \quad \beta = -2.$$

Comme :

$$4 > 0,$$

la fonction admet un minimum égal à :

$$\boxed{-2}$$

atteint pour :

$$\boxed{x = -1}.$$

Méthode

Exercice type

Soit :

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 23.$$

Montrer que :

$$f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$$

puis déterminer son minimum.

On développe :

$$2(x - 3)^2 + 5 = 2(x^2 - 6x + 9) + 5.$$

Donc :

$$2(x - 3)^2 + 5 = 2x^2 - 12x + 18 + 5 = 2x^2 - 12x + 23.$$

Ainsi :

$$f(x) = 2(x - 3)^2 + 5.$$

Comme :

$$2 > 0,$$

f admet un minimum.

Ce minimum vaut :

$$\boxed{5}$$

et il est atteint pour :

$$\boxed{x = 3}.$$

4) Équations du second degré

Définition

Une équation du second degré est une équation qui peut s'écrire :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

avec :

$$a \neq 0.$$

Les solutions de cette équation sont aussi appelées les **racines** du trinôme.

Exemple

L'équation :

$$x^2 - 4 = 0$$

possède deux solutions :

$$x = 2 \quad \text{et} \quad x = -2.$$

En effet :

$$2^2 - 4 = 0$$

et :

$$(-2)^2 - 4 = 0.$$

A) Interprétation graphique

Propriété

Résoudre :

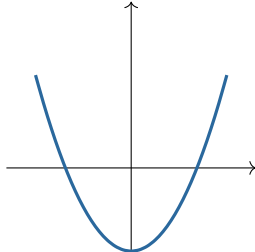
$$ax^2 + bx + c = 0$$

revient à chercher les abscisses des points où la parabole :

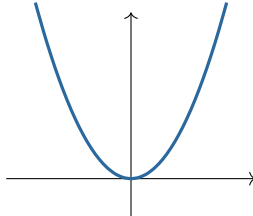
$$y = ax^2 + bx + c$$

coupe l'axe des abscisses.

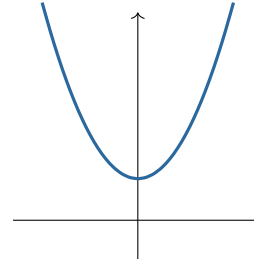
Deux solutions



Une solution



Aucune solution



B) Discriminant

Définition

Le nombre :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

est appelé le **discriminant** du trinôme :

$$ax^2 + bx + c.$$

La lettre grecque Δ se lit « delta ».

Exemple

Pour :

$$2x^2 + 5x + 3,$$

on a :

$$a = 2, \quad b = 5, \quad c = 3.$$

Donc :

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 3.$$

Ainsi :

$$\Delta = 25 - 24 = \boxed{1}.$$

5) Résoudre une équation du second degré

Théorème

On considère :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

avec :

$$a \neq 0$$

et :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Si $\Delta > 0$

L'équation possède deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et :

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta = 0$

L'équation possède une unique solution réelle, appelée racine double :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Si $\Delta < 0$

L'équation ne possède aucune solution réelle.

Méthode

Pour résoudre une équation du second degré :

1- On identifie a , b et c .

2- On calcule :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

3- On regarde le signe de Δ .

4- On applique la formule correspondant au cas obtenu.

Exemple

Réolvons :

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

On a :

$$a = 1, \quad b = -7, \quad c = 10.$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10.$$

Donc :

$$\Delta = 49 - 40 = 9.$$

Comme :

$$\Delta > 0,$$

l'équation possède deux solutions.

$$x_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{7 - 3}{2} = 2.$$

Et :

$$x_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{7 + 3}{2} = 5.$$

Ainsi :

$$\boxed{x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 5}.$$

Exemple

Réolvons :

$$-\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0.$$

On a :

$$a = -\frac{1}{16}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = -1.$$

Calculons :

$$\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{16}\right) \times (-1).$$

Donc :

$$\Delta = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

L'équation possède donc une racine double :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Ainsi :

$$x_0 = -\frac{-\frac{1}{2}}{2 \times \left(-\frac{1}{16}\right)}.$$

Donc :

$$\boxed{x_0 = -4}.$$

Exemple

Réolvons :

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

On a :

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1.$$

Alors :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1.$$

Donc :

$$\Delta = -3.$$

Comme :

$$\Delta < 0,$$

l'équation n'a aucune solution réelle.

$$\boxed{\text{Aucune solution réelle}}$$

6) Somme et produit des racines

Théorème

On considère le trinôme :

$$ax^2 + bx + c$$

avec :

$$a \neq 0.$$

S'il possède deux racines réelles x_1 et x_2 , éventuellement égales, alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

et :

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Remarque

Ces relations peuvent permettre de trouver rapidement une deuxième racine lorsqu'une première racine est évidente.

Exemple

On considère :

$$2x^2 - x - 1 = 0.$$

On remarque immédiatement que :

$$x_1 = 1$$

est une solution car :

$$2 \times 1^2 - 1 - 1 = 0.$$

Le produit des racines vaut :

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}.$$

Donc :

$$1 \times x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$x_2 = -\frac{1}{2}.$$

7) Retrouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit

Propriété

Deux nombres réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement s'ils sont solutions de :

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Méthode

Pour trouver deux nombres dont on connaît la somme S et le produit P :

1- On écrit :

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

2- On calcule le discriminant.

3- On résout l'équation.

4- Les solutions obtenues sont les deux nombres recherchés.

Exemple

On cherche deux nombres réels dont :

la somme vaut 4

et :

le produit vaut 1.

Ils doivent donc être solutions de :

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Calculons :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1.$$

Donc :

$$\Delta = 16 - 4 = 12.$$

Comme :

$$\Delta > 0,$$

il existe deux solutions :

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{12}}{2}.$$

Or :

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Donc :

$$x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

De même :

$$x_2 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

Les deux nombres recherchés sont donc :

$$\boxed{2 - \sqrt{3} \quad \text{et} \quad 2 + \sqrt{3}}.$$

8) Formules à connaître

Méthode

Pour une fonction du second degré :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Sommet :

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$\beta = f(\alpha)$$

Forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0$:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Si $\Delta < 0$:

aucune solution réelle

Somme et produit des racines :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$