



## Chapitre 5 : Les nombres

### 1) Déterminer les diviseurs d'un nombre entier

#### Définition (entier naturel)

Un entier naturel est un nombre entier positif ou nul.

#### Définition (division euclidienne)

$a$  et  $b$  désignent deux entiers naturels avec  $b$  différent de 0.

Effectuer la division euclidienne de  $a$  par  $b$ , c'est déterminer les deux entiers naturels  $q$  et  $r$  tels que :

$$a = b \times q + r \quad \text{avec} \quad r < b.$$

$a$  s'appelle le dividende,  $b$  le diviseur,  $q$  le quotient et  $r$  le reste.

#### Remarque

On ne peut jamais diviser par 0.

#### Exemple

Dans la division euclidienne de 23 par 5, on a :

$$23 = 5 \times 4 + 3.$$

Le quotient est 4 et le reste est 3.

#### Définition

$a$  et  $b$  désignent deux entiers naturels avec  $b$  différent de 0.

Lorsque la division euclidienne de  $a$  par  $b$  donne un reste nul, c'est-à-dire  $r = 0$ , on a :

$$a = b \times q$$

où  $q$  est un entier naturel.

On dit que :

- $a$  est un multiple de  $b$  ;
- $b$  est un diviseur de  $a$  ;
- $a$  est divisible par  $b$ .

#### Exemple

On a :

$$24 = 6 \times 4.$$

Donc 24 est un multiple de 6, 6 est un diviseur de 24 et 24 est divisible par 6.

## Méthode

Pour savoir si un nombre est divisible par 2, 3, 5, 9 ou 10, on peut utiliser les critères de divisibilité suivants.

Diviseurs	Astuces	Exemples
Nombres divisibles par 2	Le nombre doit être pair. Il doit donc se terminer par 0, 2, 4, 6 ou 8.	124 se termine par 4, donc 124 est divisible par 2. 111 se termine par 1, donc 111 n'est pas divisible par 2.
Nombres divisibles par 3	On additionne tous les chiffres du nombre donné. La somme doit être un multiple de 3.	$128 : 1 + 2 + 8 = 11$ , donc 128 n'est pas divisible par 3. $255 : 2 + 5 + 5 = 12$ , donc 255 est divisible par 3.
Nombres divisibles par 5	Le nombre doit se terminer par 0 ou 5.	125 est divisible par 5. 450 est divisible par 5. 71 n'est pas divisible par 5.
Nombres divisibles par 9	On additionne tous les chiffres du nombre donné. La somme doit être un multiple de 9.	$351 : 3 + 5 + 1 = 9$ , donc 351 est divisible par 9.
Nombres divisibles par 10	Le nombre doit se terminer par 0.	20 est divisible par 10. 31 n'est pas divisible par 10.

## 2) Reconnaître un nombre premier

### Définition

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs qui sont :

- 1 ;
- lui-même.

### Exemple

7 est un nombre premier car ses seuls diviseurs sont 1 et 7.

12 n'est pas un nombre premier car il possède plus de deux diviseurs :

1, 2, 3, 4, 6, 12.

### Remarque

- 0 n'est pas un nombre premier car il possède une infinité de diviseurs.
- 1 n'est pas premier car il possède un seul diviseur : lui-même.
- 2 est le seul nombre premier pair car tous les nombres pairs sont divisibles par 2.

### Propriété

Les nombres premiers inférieurs à 100 sont :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

### Propriété

Il existe une infinité de nombres premiers.

## 3) Décomposer en produit de facteurs premiers

### Propriété

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de facteurs premiers.

### Exemple

On décompose 60 en produit de facteurs premiers :

$$60 = 2 \times 30$$

$$60 = 2 \times 2 \times 15$$

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5.$$

Donc :

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5.$$

### Propriété

Pour un nombre entier donné, il n'existe qu'une seule décomposition en produit de facteurs premiers, si l'on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs.

### Exemple

On peut écrire :

$$84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2 \times 2 \times 3 \times 7.$$

Donc :

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7.$$

## 4) Application : rendre une fraction irréductible

### Propriété

Pour simplifier une fraction et la rendre irréductible, on décompose son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

La simplification de la fraction s'effectue ensuite en supprimant les facteurs premiers en commun.

### Exemple

Rendre irréductible la fraction :

$$\frac{60}{126}.$$

On décompose le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers :

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

et

$$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7.$$

On a alors :

$$\frac{60}{126} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 7}.$$

On simplifie par les facteurs communs 2 et 3 :

$$\frac{60}{126} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}.$$

Donc :

$$\frac{60}{126} = \frac{10}{21}.$$

10 et 21 sont premiers entre eux, donc  $\frac{10}{21}$  est la fraction irréductible égale à  $\frac{60}{126}$ .

## 5) Application : le PGCD

### Définition

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls.

On appelle PGCD de  $a$  et  $b$  le plus grand commun diviseur de  $a$  et  $b$ .

On le note :

$$\text{PGCD}(a; b).$$

### Exemple

Un philatéliste possède 1 631 timbres français et 932 timbres étrangers.

Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant le maximum de lots identiques, c'est-à-dire comportant le même nombre de timbres et la même répartition de timbres français et étrangers.

### Questions

1. Calculer le nombre maximum de lots qu'il pourra réaliser.
2. Combien y aura-t-il, dans ce cas, de timbres français et étrangers dans chaque lot ?

### Réponse

Les critères sont :

- faire le maximum de lots identiques ;
- utiliser toute la collection, sans reste.

On calcule donc le plus grand commun diviseur de 932 et 1 631.

On décompose :

$$932 = 2 \times 2 \times 233$$

et

$$1\,631 = 7 \times 233.$$

Le facteur commun le plus grand est 233.

Donc :

$$\text{PGCD}(932; 1\,631) = 233.$$

Le nombre maximum de lots est donc :

$$233.$$

Il pourra réaliser **233 lots**.

Dans chaque lot, il y aura :

$$\frac{932}{233} = 4$$

timbres étrangers, et :

$$\frac{1\,631}{233} = 7$$

timbres français.

Chaque lot contiendra donc **4 timbres étrangers** et **7 timbres français**.