



Cours : Probabilités conditionnelles et indépendance

1) Rappels de probabilités

Définitions

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard.

Chaque résultat possible est appelé une **issue**.

L'ensemble de toutes les issues est appelé l'**univers**, généralement noté :

$$\Omega.$$

Un **événement** est un ensemble d'issues.

Un événement constitué d'une seule issue est appelé un **événement élémentaire**.

Propriétés

Pour tout événement A :

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

La probabilité de l'univers vaut :

$$P(\Omega) = 1.$$

La probabilité de l'événement contraire de A , noté $\bar{A}$, est :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

A) Intersection et réunion

Définitions

L'événement :

$$A \cap B$$

signifie :

$$\ll A \text{ et } B \gg.$$

Il correspond à la réalisation simultanée de A et de B .

L'événement :

$$A \cup B$$

signifie :

$$\ll A \text{ ou } B \gg.$$

Il correspond à la réalisation d'au moins l'un des deux événements.

Propriété

Pour deux événements A et B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Remarque

Si A et B sont **incompatibles**, ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Donc :

$$A \cap B = \emptyset$$

et :

$$P(A \cap B) = 0.$$

Ainsi :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

2) Probabilité conditionnelle

Définition

Soient A et B deux événements avec :

$$P(A) \neq 0.$$

La probabilité que B se réalise **sachant que A est réalisé** est notée :

$$P_A(B).$$

Elle est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarque

$P_A(B)$ se lit :

$$\text{« probabilité de B sachant A »}.$$

En réarrangeant la formule :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

Attention

Il ne faut pas confondre :

$$P_A(B) \quad \text{et} \quad P_B(A).$$

En général :

$$P_A(B) \neq P_B(A).$$

Propriété

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors :

$$P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

car les deux expressions sont égales à :

$$P(A \cap B).$$

Exemple

Un sachet contient 100 bonbons.

Parmi eux :

- 40 sont acidulés ;
- 60 sont à la guimauve ;
- parmi les bonbons acidulés, 10 sont à l'orange ;
- parmi les bonbons à la guimauve, 18 sont à l'orange.

On note :

A : « le bonbon est acidulé »

et :

O : « le bonbon est à l'orange ».

On a :

$$P(A) = \frac{40}{100} = 0,4$$

et :

$$P(A \cap O) = \frac{10}{100} = 0,1.$$

Donc :

$$P_A(O) = \frac{P(A \cap O)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,4}.$$

Ainsi :

$$P_A(O) = 0,25.$$

3) Utiliser un tableau à double entrée

Méthode

Un tableau à double entrée permet d'organiser les probabilités.

	B	$\overline{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Puis :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Exemple

Un club sportif compte 180 membres.

Il y a :

- 135 seniors ;
- parmi les seniors, 81 hommes ;
- parmi les juniors, 27 garçons.

Il y a :

$$180 - 135 = 45$$

juniors.

Parmi ces 45 juniors, 27 sont des garçons. Il y a donc :

$$45 - 27 = 18$$

filles juniors.

Parmi les 135 seniors, il y a :

$$135 - 81 = 54$$

femmes.

Le nombre total de femmes est donc :

$$18 + 54 = 72.$$

On choisit une femme au hasard.

La probabilité qu'elle soit junior vaut :

$$P_F(J) = \frac{18}{72} = 0,25.$$

Ainsi :

$$P_F(J) = 0,25.$$

4) Arbres pondérés

Définition

Un **arbre pondéré** permet de représenter une expérience aléatoire qui se déroule en plusieurs étapes. Les probabilités sont écrites sur les branches. Chaque succession de branches constitue un **chemin**.

Propriétés

Dans un arbre pondéré :

— la somme des probabilités partant d'un même nœud vaut :

$$1;$$

— la probabilité d'un chemin est obtenue en **multipliant** les probabilités des branches du chemin ;
— lorsqu'un événement correspond à plusieurs chemins, on **additionne** les probabilités de ces chemins.

Exemple

On reprend l'exemple des bonbons.

On note :

A : « acidulé », G : « guimauve »,

O : « orange », F : « autre parfum ».

On sait que :

$$P(A) = 0,4 \quad \text{et} \quad P(G) = 0,6.$$

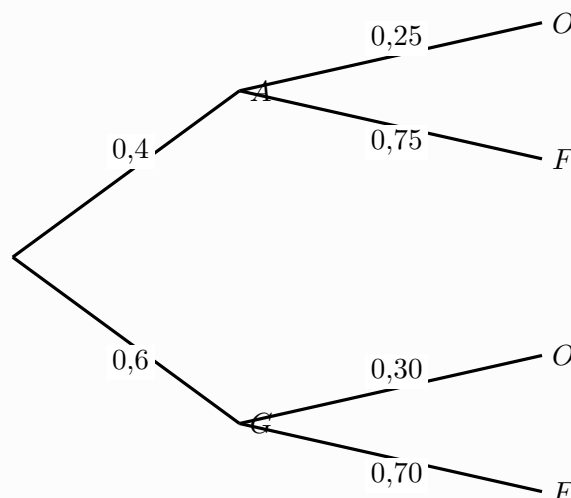
Parmi les bonbons acidulés :

$$P_A(O) = 0,25 \quad \text{et} \quad P_A(F) = 0,75.$$

Parmi les bonbons à la guimauve :

$$P_G(O) = 0,30 \quad \text{et} \quad P_G(F) = 0,70.$$

L'arbre pondéré est :



Exemple – Suite

Pour calculer :

$$P(A \cap O),$$

on multiplie les probabilités situées sur le chemin correspondant :

$$P(A \cap O) = P(A) \times P_A(O).$$

Donc :

$$P(A \cap O) = 0,4 \times 0,25 = 0,10.$$

Ainsi :

$$\boxed{P(A \cap O) = 0,10}.$$

De même :

$$P(G \cap F) = P(G) \times P_G(F).$$

Donc :

$$P(G \cap F) = 0,6 \times 0,7 = \boxed{0,42}.$$

5) Formule des probabilités totales

Définition

Des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une **partition de l'univers** lorsqu'ils vérifient :

- ils sont incompatibles deux à deux ;
- leur réunion forme tout l'univers :

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega.$$

Remarque

Un événement A et son événement contraire $\bar{A}$ forment toujours une partition de l'univers :

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

et :

$$A \cup \bar{A} = \Omega.$$

Théorème

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers, alors :

$$\boxed{P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)}$$

Donc :

$$\boxed{P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B)}$$

Propriété

Dans le cas d'une partition formée par A et $\bar{A}$:

$$\boxed{P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)}$$

Exemple

On considère :

$$P(A) = 0,6,$$

$$P_A(B) = 0,7,$$

et :

$$P_{\bar{A}}(B) = 0,2.$$

On cherche $P(B)$.

D'abord :

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B).$$

Donc :

$$P(B) = 0,6 \times 0,7 + 0,4 \times 0,2.$$

Ainsi :

$$P(B) = 0,42 + 0,08 = \boxed{0,50}.$$

6) Indépendance de deux événements

Définition

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

Propriété

Si :

$$P(A) \neq 0,$$

alors A et B sont indépendants si et seulement si :

$$\boxed{P_A(B) = P(B)}.$$

Autrement dit, savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B .

Attention

Il ne faut pas confondre :

événements incompatibles

et :

événements indépendants.

Deux événements incompatibles ne peuvent jamais se réaliser en même temps :

$$P(A \cap B) = 0.$$

Deux événements indépendants peuvent au contraire se réaliser simultanément.

Exemple

On sait que :

$$P(A) = 0,8,$$

$$P(B) = 0,35$$

et :

$$P(A \cap B) = 0,28.$$

Calculons :

$$P(A) \times P(B) = 0,8 \times 0,35 = 0,28.$$

On obtient donc :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Ainsi :

A et B sont indépendants.

Propriété

Si A et B sont indépendants, alors sont également indépendants :

A et $\overline{B}$,

$\overline{A}$ et B ,

et :

$\overline{A}$ et $\overline{B}$.

7) Succession d'épreuves indépendantes

Définition

Deux expériences aléatoires sont **indépendantes** lorsque le résultat de l'une n'influence pas le résultat de l'autre.

Exemple

On lance plusieurs fois une pièce.
Le résultat d'un lancer ne modifie pas la probabilité d'obtenir pile ou face au lancer suivant.
Les différents lancers sont donc indépendants.

Définition

Deux expériences sont **identiques** lorsqu'elles ont :

- les mêmes issues ;
- les mêmes probabilités pour chacune de ces issues.

8) Épreuve de Bernoulli

Définition

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui ne possède que deux issues :

- un **succès** S , de probabilité :

$$p;$$

- un **échec** $\bar{S}$, de probabilité :

$$1 - p.$$

Le nombre p est appelé le **paramètre** de l'épreuve de Bernoulli.

Remarque

Les mots « succès » et « échec » sont seulement des noms donnés aux deux issues.
Un succès ne correspond pas forcément à quelque chose de positif.

Exemple

Une urne contient 7 boules vertes et 3 boules noires.
On tire une boule au hasard et on choisit comme succès :

S : « obtenir une boule verte ».

Alors :

$$P(S) = \frac{7}{10} = 0,7$$

et :

$$P(\bar{S}) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Cette expérience est donc une épreuve de Bernoulli de paramètre :

$$p = 0,7.$$

9) Schéma de Bernoulli

Définition

Un **schéma de Bernoulli** consiste à répéter :

n fois

de manière :

identique et indépendante

une même épreuve de Bernoulli de paramètre p .

Les paramètres du schéma sont donc :

n et p .

Exemple

On lance 5 fois une pièce truquée pour laquelle :

$$P(\text{Pile}) = \frac{1}{3}.$$

On choisit « obtenir Pile » comme succès.

Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli de paramètres :

$$n = 5 \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{3}.$$

La probabilité d'obtenir la succession :

$$P; F; P; P; F$$

est :

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}.$$

Ainsi :

$$P(P; F; P; P; F) = \frac{4}{243}.$$

10) Méthode : résoudre un exercice avec un arbre pondéré

Méthode

Dans un exercice avec un arbre pondéré :

- 1- On identifie les événements du premier niveau.
- 2- On complète les probabilités contraires avec :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

- 3- On complète les probabilités conditionnelles du deuxième niveau.
- 4- Pour calculer la probabilité d'un chemin, on multiplie les probabilités des branches.
- 5- Pour calculer une probabilité correspondant à plusieurs chemins, on additionne les probabilités de ces chemins.

Exemple

On considère :

$$P(A) = 0,7,$$

$$P_A(B) = 0,4,$$

et :

$$P_{\bar{A}}(B) = 0,8.$$

1) Calculer $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

Donc :

$$P(A \cap B) = 0,7 \times 0,4 = \boxed{0,28}.$$

2) Calculer $P(B)$

On a :

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B).$$

Donc :

$$P(B) = 0,7 \times 0,4 + 0,3 \times 0,8.$$

Ainsi :

$$P(B) = 0,28 + 0,24 = \boxed{0,52}.$$

11) Formules à retenir

Méthode

Événement contraire

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Réunion de deux événements

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilité conditionnelle

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{si } P(A) \neq 0$$

Probabilité d'une intersection

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

ou :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

Probabilités totales

Avec la partition A et $\overline{A}$:

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$$

Indépendance

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Si $P(A) \neq 0$:

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \iff P_A(B) = P(B)$$

Épreuve de Bernoulli

$$P(S) = p$$

$$P(\overline{S}) = 1 - p$$

Schéma de Bernoulli

On répète n fois, de manière identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre p .

$$\text{Paramètres : } n \text{ et } p$$