



## Cours : Théorème de Thalès

### 1) Calculer des longueurs avec le théorème de Thalès

#### Théorème de Thalès

Les points  $A, M, B$  d'une part et les points  $A, N, C$  d'autre part sont alignés dans le même ordre.  
Si :

$$(MN) \parallel (BC),$$

alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

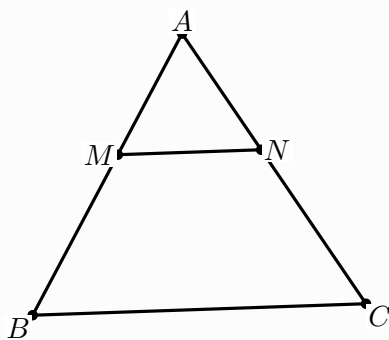
On peut également écrire les rapports inverses :

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$$

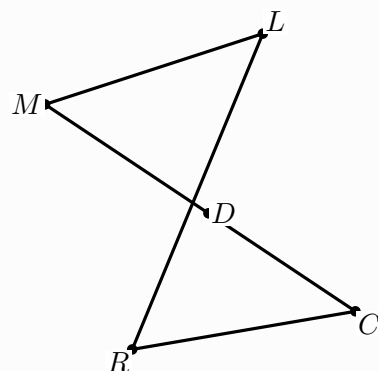
#### Exemple

Les deux configurations usuelles du théorème de Thalès sont représentées ci-dessous.

Triangles emboîtés



Configuration en papillon



#### Remarque

Dans une égalité de rapports, on associe toujours les côtés qui occupent la même position :

$$AM \longleftrightarrow AB, \quad AN \longleftrightarrow AC, \quad MN \longleftrightarrow BC.$$

## Méthode

Pour utiliser le théorème de Thalès, on rédige dans cet ordre :

- 1- On indique les deux droites sécantes et leur point d'intersection.
- 2- On précise les alignements des points.
- 3- On indique que les deux autres droites sont parallèles avec le symbole //.
- 4- On écrit : « D'après le théorème de Thalès, on a... »
- 5- On écrit les rapports puis on effectue un produit en croix.

## Propriété

Si :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

alors :

$$a \times d = b \times c$$

## Exemple

### Application dans une configuration de triangles emboîtés

Les droites  $(TS)$  et  $(TF)$  sont sécantes en  $T$ .

Les points  $T, G, S$  d'une part et  $T, H, F$  d'autre part sont alignés dans le même ordre.

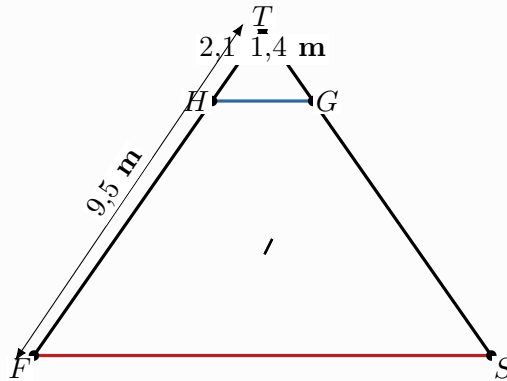
On a :

$$(GH) // (SF).$$

On connaît :

$$TG = 1,4 \text{ m}, \quad TH = 2,1 \text{ m}, \quad TF = 9,5 \text{ m}.$$

On cherche  $TS$ .



Les droites  $(TS)$  et  $(TF)$  sont sécantes en  $T$ .

Les points  $T, G, S$  d'une part et  $T, H, F$  d'autre part sont alignés dans le même ordre.

De plus :

$$(GH) // (SF).$$

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{TG}{TS} = \frac{TH}{TF} = \frac{GH}{SF}.$$

Donc :

$$\frac{1,4}{TS} = \frac{2,1}{9,5}.$$

Par produit en croix :

$$TS = \frac{1,4 \times 9,5}{2,1} \approx 6,3.$$

Ainsi :

$$TS \approx 6,3 \text{ m}$$

## Exemple

### Application dans une configuration en papillon

Les droites  $(VA)$  et  $(HC)$  sont sécantes en  $S$ .

Les points  $V, S, A$  d'une part et  $H, S, C$  d'autre part sont alignés dans le même ordre.

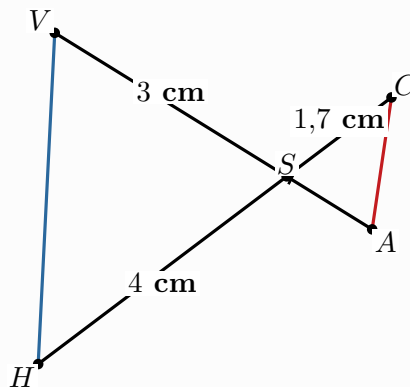
On a :

$$(VH) \parallel (AC).$$

On connaît :

$$SV = 3 \text{ cm}, \quad SH = 4 \text{ cm}, \quad SC = 1,7 \text{ cm}.$$

On cherche  $SA$ .



Les droites  $(VA)$  et  $(HC)$  sont sécantes en  $S$ .

Les points  $V, S, A$  d'une part et  $H, S, C$  d'autre part sont alignés dans le même ordre.

De plus :

$$(VH) \parallel (AC).$$

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{SV}{SA} = \frac{SH}{SC} = \frac{VH}{AC}.$$

Donc :

$$\frac{3}{SA} = \frac{4}{1,7}.$$

Par produit en croix :

$$SA = \frac{3 \times 1,7}{4} = 1,275.$$

Ainsi :

$$SA = 1,275 \text{ cm}$$

## 2) Démontrer que des droites sont parallèles

### Réciproque du théorème de Thalès

Les points  $A, M, B$  d'une part et les points  $A, N, C$  d'autre part sont alignés dans le même ordre.  
Si :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC},$$

alors :

$$(MN) // (BC)$$

### Méthode

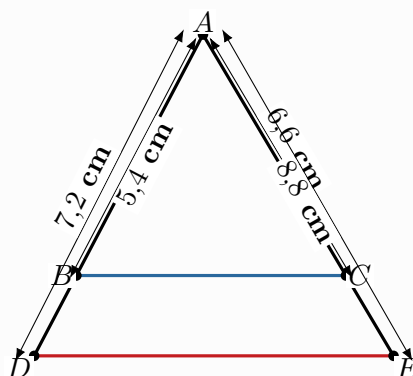
Pour démontrer que deux droites sont parallèles :

- 1- On précise les alignements et l'ordre des points.
- 2- On calcule séparément les deux rapports.
- 3- On vérifie que les deux rapports sont égaux.
- 4- On conclut avec la réciproque du théorème de Thalès.

### Exemple

Les points  $A, B, D$  d'une part et  $A, C, E$  d'autre part sont alignés dans le même ordre.  
On sait que :

$$AB = 5,4 \text{ cm}, \quad AD = 7,2 \text{ cm}, \quad AC = 6,6 \text{ cm}, \quad AE = 8,8 \text{ cm}.$$



On calcule séparément :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{5,4}{7,2} = 0,75$$

et :

$$\frac{AC}{AE} = \frac{6,6}{8,8} = 0,75.$$

Ainsi :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Les points  $A, B, D$  d'une part et  $A, C, E$  d'autre part sont alignés dans le même ordre.  
D'après la réciproque du théorème de Thalès :

$$(BC) // (DE)$$

## Propriété

Si les deux rapports ne sont pas égaux, les droites ne sont pas parallèles.

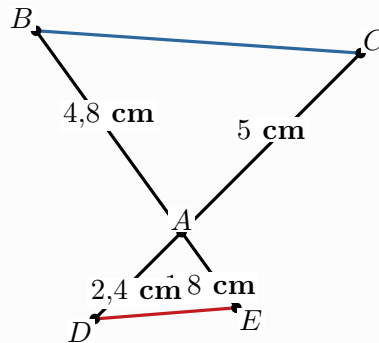
En effet, si elles étaient parallèles, le théorème de Thalès imposerait l'égalité des rapports.

## Exemple

Les points  $B, A, E$  d'une part et  $C, A, D$  d'autre part sont alignés dans le même ordre.

On sait que :

$$AB = 4,8 \text{ cm}, \quad AE = 1,8 \text{ cm}, \quad AC = 5 \text{ cm}, \quad AD = 2,4 \text{ cm}.$$



On calcule séparément :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{1,8}{4,8} = 0,375$$

et :

$$\frac{AD}{AC} = \frac{2,4}{5} = 0,48.$$

Ainsi :

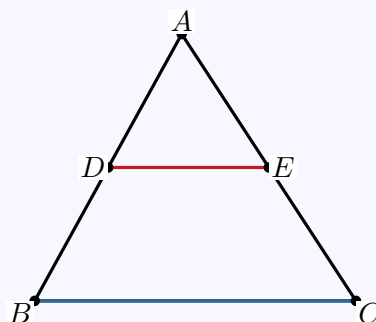
$$\frac{AE}{AB} \neq \frac{AD}{AC}.$$

L'égalité de Thalès n'est pas vérifiée.

Donc les droites  $(BC)$  et  $(DE)$  ne sont pas parallèles.

## Remarque

Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.



Si  $AD = DB$  et  $AE = EC$ , alors  $D$  et  $E$  sont les milieux de  $[AB]$  et  $[AC]$ .

Donc :

$$(DE) // (BC)$$