



Correction – Suites numériques

Partie 1 : Vocabulaire, indices et représentation

Exercice 1 – Comprendre les notations

Correction

La suite commence par :

$$3; 8; 13; 18; 23; \dots$$

et le premier terme est u_0 .

1. On lit directement :

$$\boxed{u_0 = 3}, \quad \boxed{u_1 = 8}, \quad \boxed{u_2 = 13}, \quad \boxed{u_4 = 23}.$$

2. Le terme 18 est u_3 . Son indice est donc :

$$\boxed{3}.$$

3. (u_n) désigne la **suite entière**.

4. u_3 désigne le **terme d'indice 3**. Ici :

$$\boxed{u_3 = 18}.$$

Exercice 2 – Premier terme et ensemble d'indices

Correction

On a :

$$v_n = \frac{1}{n-2}.$$

1. Pour $n = 2$:

$$v_2 = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0}.$$

Or une division par zéro est impossible. Ainsi :

$$\boxed{v_2 \text{ n'existe pas.}}$$

2. La suite est définie pour $n \geq 3$. Son premier terme est donc :

$$\boxed{v_3}.$$

3. On calcule :

$$v_3 = \frac{1}{3-2} = \boxed{1},$$

$$v_4 = \frac{1}{4-2} = \boxed{\frac{1}{2}},$$

et

$$v_6 = \frac{1}{6-2} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

Exercice 3 – Attention aux indices

Correction

On sait seulement que :

$$u_5 = 12.$$

1.

$$u_5 + 1 = 12 + 1 = \boxed{13}.$$

2. Non. Connaître u_5 ne permet pas, à lui seul, de connaître u_6 .

On ne peut pas déterminer u_6 .

3. u_{n+1} désigne le terme dont l'indice est celui qui vient juste après n .

4. Attention :

$$u_{n+1}$$

est le **terme suivant**, alors que

$$u_n + 1$$

est le nombre obtenu en ajoutant 1 à la valeur de u_n .

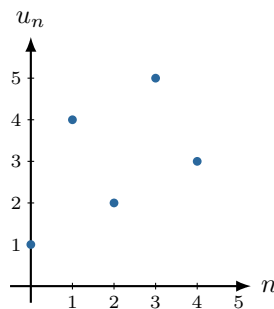
Ces deux expressions ne sont donc pas forcément égales.

Exercice 4 – Représenter une suite

Correction

Les points à placer sont :

$$(0; 1), \quad (1; 4), \quad (2; 2), \quad (3; 5), \quad (4; 3).$$



On ne relie pas les points : une suite est définie pour des **indices entiers**. Il n'existe par exemple pas de terme $u_{1,5}$ dans cette suite.

Exercice 5 – Lire une représentation graphique

Correction

On lit les coordonnées des points.

1.

$$\boxed{u_0 = 3}, \quad \boxed{u_1 = 5}, \quad \boxed{u_3 = 6}, \quad \boxed{u_4 = 2}.$$

2. Le point $(2; 4)$ est représenté. Donc :

$$\boxed{u_2 = 4}.$$

Le terme égal à 4 est donc le terme d'indice 2.

3. La plus grande ordonnée représentée est 6 :

$$\boxed{u_3 = 6}.$$

Partie 2 : Suites définies par une formule explicite

Exercice 6 – Calculer des termes

Correction

On a :

$$u_n = 4n - 3.$$

On remplace n par l'indice demandé :

$$u_0 = 4 \times 0 - 3 = \boxed{-3},$$

$$u_1 = 4 \times 1 - 3 = \boxed{1},$$

$$u_5 = 4 \times 5 - 3 = 20 - 3 = \boxed{17},$$

$$u_{20} = 4 \times 20 - 3 = 80 - 3 = \boxed{77}.$$

Exercice 7 – Une formule avec une racine carrée

Correction

$$v_n = \sqrt{n+5}.$$

Ainsi :

$$v_4 = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = \boxed{3},$$

$$v_{11} = \sqrt{11+5} = \sqrt{16} = \boxed{4},$$

$$v_{20} = \sqrt{20+5} = \sqrt{25} = \boxed{5}.$$

Exercice 8 – Retrouver un indice

Correction

On a :

$$u_n = 3n + 2.$$

1.

$$u_7 = 3 \times 7 + 2 = 21 + 2 = \boxed{23}.$$

2. On cherche n tel que :

$$3n + 2 = 29.$$

Donc :

$$3n = 27$$

puis :

$$\boxed{n = 9}.$$

Ainsi :

$$\boxed{u_9 = 29}.$$

3. On cherche si un entier naturel n vérifie :

$$3n + 2 = 40.$$

Donc :

$$3n = 38$$

et

$$n = \frac{38}{3}.$$

Ce nombre n'est pas un entier naturel. Donc :

40 n'est pas un terme de la suite.

Exercice 9 – Exprimer le terme suivant

Correction

Il suffit de remplacer n par $n + 1$.

a)

$$u_{n+1} = 5(n + 1) + 1$$

donc :

$$u_{n+1} = 5n + 6.$$

b)

$$u_{n+1} = (n + 1)^2 + 3.$$

Or :

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1.$$

Donc :

$$u_{n+1} = n^2 + 2n + 4.$$

c)

$$u_{n+1} = 2(n + 1)^2 - (n + 1).$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2(n^2 + 2n + 1) - n - 1 \\ &= 2n^2 + 4n + 2 - n - 1. \end{aligned}$$

Finalement :

$$u_{n+1} = 2n^2 + 3n + 1.$$

Exercice 10 – Les gradins d'un théâtre

Correction

On a :

$$u_n = 18 + 2n.$$

1. $u_0 = 18$ représente le nombre de places de la **première rangée**.
- 2.

$$u_5 = 18 + 2 \times 5 = 28.$$

Donc la rangée située 5 rangées après la première possède :

28 places.

Il s'agit de la sixième rangée réelle.

- 3.

$$u_{12} = 18 + 2 \times 12 = 42.$$

La rangée située 12 rangées après la première possède donc :

42 places.

4. On résout :

$$18 + 2n = 40.$$

Donc :

$$2n = 22$$

et :

$$\boxed{n = 11}.$$

5. $n = 0$ correspond à la première rangée. Ainsi $n = 11$ correspond à la douzième rangée.

$\boxed{\text{La 12e rangée possède 40 places.}}$

Partie 3 : Suites définies par récurrence

Exercice 11 – Calculer les premiers termes

Correction

On a :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n + 3.$$

Ainsi :

$$u_1 = 2u_0 + 3 = 2 \times 1 + 3 = \boxed{5}.$$

Puis :

$$u_2 = 2u_1 + 3 = 2 \times 5 + 3 = \boxed{13}.$$

Enfin :

$$u_3 = 2u_2 + 3 = 2 \times 13 + 3 = \boxed{29}.$$

Exercice 12 – Une récurrence simple

Correction

On a :

$$v_1 = 10 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n - 2.$$

Donc :

$$v_2 = 10 - 2 = \boxed{8},$$

$$v_3 = 8 - 2 = \boxed{6},$$

$$v_4 = 6 - 2 = \boxed{4},$$

$$v_5 = 4 - 2 = \boxed{2}.$$

Exercice 13 – Explicite ou récurrence ?

Correction

a)

$$u_n = 4n + 7$$

permet de calculer directement u_n à partir de n .

Formule explicite.

b)

$$v_{n+1} = v_n + 5$$

permet de calculer un terme à partir du précédent.

Récurrence.

c)

$$w_n = n^2 - 2n + 1.$$

Formule explicite.

d)

$$t_{n+1} = 2t_n.$$

Récurrence.

Exercice 14 – Une cagnotte

Correction

Au départ :

$$u_0 = 50.$$

Chaque mois, Lina ajoute 15 €.

1. La relation de récurrence est donc :

$$u_{n+1} = u_n + 15.$$

- 2.

$$u_1 = 50 + 15 = 65,$$

$$u_2 = 65 + 15 = 80,$$

$$u_3 = 80 + 15 = 95.$$

3. u_3 représente la somme disponible après trois mois.

Après 3 mois, Lina possède 95 €.

Exercice 15 – Les rebonds d'une balle

Correction

On a :

$$h_0 = 256.$$

Chaque hauteur représente $\frac{3}{4}$ de la précédente.

- 1.

$$h_{n+1} = \frac{3}{4}h_n.$$

- 2.

$$h_1 = \frac{3}{4} \times 256 = 192.$$

Puis :

$$h_2 = \frac{3}{4} \times 192 = 144.$$

Enfin :

$$h_3 = \frac{3}{4} \times 144 = 108.$$

3. Ainsi, après le troisième rebond, la hauteur maximale atteinte par la balle est :

108 cm.

Partie 4 : Étudier le sens de variation – Méthode par différence

Exercice 16 – Conjecturer une variation

Correction

On a :

$$u_n = n^2 + 1.$$

1.

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 5, \quad u_3 = 10, \quad u_4 = 17, \quad u_5 = 26.$$

2. Les valeurs semblent augmenter. On peut donc conjecturer que :

$$(u_n) \text{ est strictement croissante.}$$

3. Quelques termes ne suffisent pas à connaître le comportement de tous les termes de la suite.
Il faut donc effectuer une démonstration pour conclure pour tout n .

Exercice 17 – Une suite strictement croissante

Correction

$$u_n = 5n - 4.$$

1.

$$u_{n+1} = 5(n+1) - 4 = 5n + 1.$$

2.

$$u_{n+1} - u_n = (5n + 1) - (5n - 4)$$

$$= 5n + 1 - 5n + 4$$

donc :

$$u_{n+1} - u_n = 5.$$

3. Pour tout n :

$$5 > 0.$$

Donc :

$$u_{n+1} > u_n.$$

Ainsi :

$$(u_n) \text{ est strictement croissante.}$$

Exercice 18 – Une suite strictement décroissante

Correction

$$v_n = -3n + 10.$$

1.

$$v_{n+1} = -3(n+1) + 10 = -3n + 7.$$

2.

$$v_{n+1} - v_n = (-3n + 7) - (-3n + 10)$$

$$= -3n + 7 + 3n - 10$$

donc :

$$v_{n+1} - v_n = -3.$$

3. Comme :

$$-3 < 0,$$

on a :

$$v_{n+1} < v_n.$$

Donc :

(v_n) est strictement décroissante.

Exercice 19 – Une différence qui dépend de l'indice

Correction

$$u_n = n^2 + 2n.$$

1.

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + 2(n+1).$$

Donc :

$$u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 2n + 2$$

et :

$$u_{n+1} = n^2 + 4n + 3.$$

2.

$$u_{n+1} - u_n = (n^2 + 4n + 3) - (n^2 + 2n).$$

Donc :

$$u_{n+1} - u_n = 2n + 3.$$

3. Pour tout $n \geq 0$:

$$2n \geq 0.$$

Donc :

$$2n + 3 > 0.$$

4. Ainsi :

$$u_{n+1} - u_n > 0.$$

Donc :

(u_n) est strictement croissante.

Exercice 20 – Une suite non monotone

Correction

On a :

$$u_n = n^2 - 6n.$$

1.

$$u_{n+1} = (n+1)^2 - 6(n+1).$$

Donc :

$$u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 - 6n - 6 = n^2 - 4n - 5.$$

Ainsi :

$$u_{n+1} - u_n = (n^2 - 4n - 5) - (n^2 - 6n).$$

Donc :

$$u_{n+1} - u_n = 2n - 5.$$

2.

$$2n - 5 < 0 \iff 2n < 5 \iff n < \frac{5}{2}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, cela donne :

$$\boxed{n = 0, 1, 2}.$$

3.

$$2n - 5 > 0 \iff n > \frac{5}{2}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{n \geq 3}.$$

4. Pour $n = 0, 1, 2$:

$$u_{n+1} < u_n.$$

On obtient donc :

$$u_0 > u_1 > u_2 > u_3.$$

À partir de $n = 3$:

$$u_{n+1} > u_n.$$

Donc :

$$u_3 < u_4 < u_5 < \dots$$

La suite est donc décroissante jusqu'au terme u_3 , puis croissante à partir de u_3 .

5. Elle change de sens de variation. Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite n'est pas monotone sur } \mathbb{N}.$$

Partie 5 : Étudier les variations – Quotient et fonction associée

Exercice 21 – Méthode par quotient

Correction

$$u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Les termes sont strictement positifs.

1.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}.$$

Donc :

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3}}.$$

2. Or :

$$\frac{2}{3} < 1.$$

3. Comme les termes sont strictement positifs et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

on obtient :

$$u_{n+1} < u_n.$$

Ainsi :

$$\boxed{(u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

Exercice 22 – Un quotient plus élaboré

Correction

$$v_n = \frac{n+2}{3^n}.$$

1.

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{n+3}{3^{n+1}}}.$$

2.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+3}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n+2}.$$

Comme :

$$3^{n+1} = 3 \times 3^n,$$

on obtient :

$$\boxed{\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+3}{3(n+2)}}.$$

3. Comparons le numérateur et le dénominateur.

$$3(n+2) - (n+3) = 3n+6 - n-3 = 2n+3.$$

Pour $n \geq 0$:

$$2n+3 > 0.$$

Donc :

$$n+3 < 3(n+2).$$

Ainsi :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1.$$

4. Les termes étant strictement positifs :

$$v_{n+1} < v_n.$$

Donc :

$$(v_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

Exercice 23 – Utiliser les variations d’une fonction

Correction

$$u_n = \frac{1}{n+2}$$

et :

$$f(x) = \frac{1}{x+2}.$$

1. Les indices vérifient $n \geq 0$. Il suffit donc d’étudier f sur :

$$[0; +\infty[.$$

2. Lorsque x augmente sur $[0; +\infty[$, le nombre $x+2$ augmente et reste strictement positif. Son inverse diminue.

Ainsi :

$$f \text{ est strictement décroissante sur } [0; +\infty[.$$

3. Comme :

$$u_n = f(n),$$

les termes de la suite suivent les variations de f aux valeurs entières.

Donc :

$$(u_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

Partie 6 : Exercice de synthèse type bac

Exercice 24 – Construction d’une mosaïque

Correction

On a :

$$u_n = (n + 3)^2.$$

Partie A – Premiers termes

1.

$$u_0 = (0 + 3)^2 = 3^2 = \boxed{9},$$

$$u_1 = (1 + 3)^2 = 4^2 = \boxed{16},$$

$$u_2 = (2 + 3)^2 = 5^2 = \boxed{25},$$

$$u_5 = (5 + 3)^2 = 8^2 = \boxed{64}.$$

2. $u_5 = 64$ signifie qu’à l’étape 5, la mosaïque comporte :

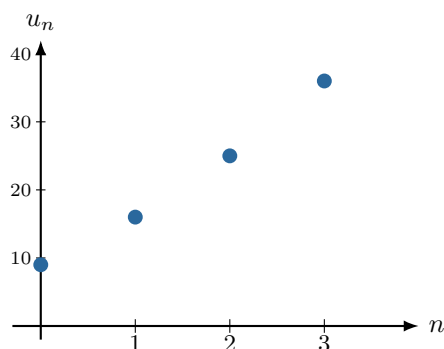
64 carreaux.

3.

$$u_3 = (3 + 3)^2 = 6^2 = \boxed{36}.$$

4. Les points à placer sont :

$(0; 9), (1; 16), (2; 25), (3; 36)$.



5. Une suite est définie pour des indices entiers. Les valeurs intermédiaires ne correspondent pas à des étapes de la construction.

On ne relie donc pas les points.

Partie B – Étude des variations

6.

$$u_{n+1} = ((n + 1) + 3)^2.$$

Donc :

$$\boxed{u_{n+1} = (n + 4)^2}.$$

7.

$$u_{n+1} - u_n = (n + 4)^2 - (n + 3)^2.$$

Développons :

$$(n + 4)^2 = n^2 + 8n + 16$$

et :

$$(n + 3)^2 = n^2 + 6n + 9.$$

Donc :

$$u_{n+1} - u_n = n^2 + 8n + 16 - n^2 - 6n - 9.$$

Ainsi :

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = 2n + 7}.$$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2n \geq 0.$$

Donc :

$$2n + 7 > 0.$$

9. Ainsi :

$$u_{n+1} - u_n > 0.$$

Donc :

$$\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

10. On cherche :

$$(n + 3)^2 = 100.$$

Comme $n + 3 > 0$:

$$n + 3 = 10.$$

Donc :

$$\boxed{n = 7}.$$

La mosaïque comporte donc exactement 100 carreaux à l'étape :

$$\boxed{7}.$$

Partie 7 : Exercice de synthèse type bac

Exercice 25 – Compressons un fichier

Correction

On a :

$$v_0 = 640$$

et :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n.$$

Partie A – Comprendre la suite

1. Pour calculer un terme, on utilise le terme précédent.

La suite est donc :

définie par récurrence.

- 2.

$$v_1 = \frac{1}{2} \times 640 = \boxed{320}.$$

Puis :

$$v_2 = \frac{1}{2} \times 320 = \boxed{160},$$

$$v_3 = \frac{1}{2} \times 160 = \boxed{80},$$

$$v_4 = \frac{1}{2} \times 80 = \boxed{40}.$$

3. $v_3 = 80$ signifie qu'après trois compressions, le fichier a une taille de :

$\boxed{80 \text{ Mo.}}$

4. On observe :

$$640 > 320 > 160 > 80 > 40.$$

On conjecture donc que :

(v_n) est strictement décroissante.

Partie B – Démontrer le sens de variation

5. $v_0 = 640 > 0$.

De plus, chaque nouveau terme est obtenu en multipliant le précédent par $\frac{1}{2}$, qui est positif.

Tous les termes sont donc strictement positifs :

$$\boxed{v_n > 0}.$$

6. Comme $v_n > 0$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}v_n}{v_n}.$$

Donc :

$$\boxed{\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}}.$$

- 7.

$$\frac{1}{2} < 1.$$

8. Les termes sont strictement positifs et :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1.$$

Donc :

$$v_{n+1} < v_n.$$

Ainsi :

(v_n) est strictement décroissante.

Partie C – Interprétation du modèle

9. On a déjà obtenu :

$$v_3 = 80$$

et :

$$v_4 = 40.$$

Or :

$$80 > 50 \quad \text{et} \quad 40 < 50.$$

La première valeur de n telle que $v_n < 50$ est donc :

$$n = 4.$$

10. On part d'un nombre strictement positif et on le multiplie à chaque étape par $\frac{1}{2}$.

On obtient donc toujours un nombre strictement positif.

Ainsi :

Dans ce modèle, la taille ne devient jamais exactement nulle.

11. Dans la réalité, on ne peut pas continuer indéfiniment à diviser la taille d'un même fichier par deux tout en conservant exactement son contenu.

Un fichier contient une quantité finie d'informations et sa taille ne peut pas être divisée indéfiniment.

Ainsi, la relation :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

constitue seulement un **modèle simplifié**, valable sur un nombre limité d'étapes.

Fin de la correction
cestcompliquelesmaths.fr