



Correction – Réciproque du théorème de Thalès

Partie 1 : Rédiger la réciproque du théorème de Thalès

Exercice 1

1. Les points A, D, B sont alignés et les points A, E, C sont alignés dans le même ordre.

On compare les deux rapports :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{3,2}{8} = 0,4$$

et

$$\frac{AE}{AC} = \frac{2,4}{6} = 0,4.$$

On a donc :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

$$\boxed{(DE) // (BC)}$$

Exercice 2

1. Les points P, M, Q sont alignés et les points P, N, R sont alignés dans le même ordre.

On compare les deux rapports :

$$\frac{PM}{PQ} = \frac{4,5}{10,5} = \frac{45}{105} = \frac{3}{7}$$

et

$$\frac{PN}{PR} = \frac{3}{7}.$$

On obtient :

$$\frac{PM}{PQ} = \frac{PN}{PR}.$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (QR) sont parallèles.

$$\boxed{(MN) // (QR)}$$

Exercice 3

1. Les points L, A, O sont alignés et les points L, B, N sont alignés dans le même ordre.

On compare les deux rapports :

$$\frac{LA}{LO} = \frac{5}{12}$$

et

$$\frac{LB}{LN} = \frac{3,6}{8,4} = \frac{36}{84} = \frac{3}{7}.$$

Or :

$$\frac{5}{12} \neq \frac{3}{7}.$$

Les rapports ne sont pas égaux. On ne peut donc pas démontrer que les droites sont parallèles avec la réciproque du théorème de Thalès.

De plus, si les droites (AB) et (ON) étaient parallèles, alors les rapports seraient égaux d'après le théorème de Thalès. Ce n'est pas le cas.

$\boxed{\text{Les droites } (AB) \text{ et } (ON) \text{ ne sont pas parallèles.}}$

Exercice 4

1. On commence par calculer les longueurs totales :

$$EF = EH + HF = 7,2 + 4,8 = 12$$

donc :

$$EF = 12 \text{ cm.}$$

De même :

$$EG = EI + IG = 6,3 + 4,2 = 10,5$$

donc :

$$EG = 10,5 \text{ cm.}$$

Les points E, H, F sont alignés et les points E, I, G sont alignés dans le même ordre.

On compare les deux rapports :

$$\frac{EH}{EF} = \frac{7,2}{12} = 0,6$$

et

$$\frac{EI}{EG} = \frac{6,3}{10,5} = 0,6.$$

On a donc :

$$\frac{EH}{EF} = \frac{EI}{EG}.$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (HI) et (FG) sont parallèles.

$$\boxed{(HI) // (FG)}$$

Exercice 5

1. Les points S, R, T sont alignés et les points S, Q, U sont alignés dans le même ordre.

On compare les deux rapports :

$$\frac{SR}{ST} = \frac{27}{45} = \frac{3}{5}$$

et

$$\frac{SQ}{SU} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}.$$

On obtient :

$$\frac{SR}{ST} = \frac{SQ}{SU}.$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (RQ) et (TU) sont parallèles.

La traverse est donc correctement placée.

$$\boxed{(RQ) // (TU)}$$

Exercice 6

1. Les points M, G, N sont alignés et les points M, H, P sont alignés dans le même ordre.

On compare les deux rapports :

$$\frac{MG}{MN} = \frac{16,8}{28} = 0,6$$

et

$$\frac{MH}{MP} = \frac{15}{24} = 0,625.$$

Or :

$$0,6 \neq 0,625.$$

Les rapports ne sont pas égaux. La bande n'est donc pas parallèle au côté $[NP]$.

$$\boxed{\text{Les droites } (GH) \text{ et } (NP) \text{ ne sont pas parallèles.}}$$

Partie 2 : Bilan, réciproque puis applications

Exercice 7

1. On cherche la valeur de x pour laquelle les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
Les points A, M, B sont alignés et les points A, N, C sont alignés dans le même ordre.
Pour pouvoir utiliser la réciproque du théorème de Thalès, il faut que :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

On remplace par les valeurs données :

$$\frac{x+2}{18} = \frac{10}{15}.$$

Or :

$$\frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Donc :

$$\frac{x+2}{18} = \frac{2}{3}.$$

On calcule :

$$x+2 = 18 \times \frac{2}{3} = 12.$$

Ainsi :

$$x = 12 - 2 = 10.$$

$$\boxed{x = 10}$$

Pour cette valeur de x , on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès :

$$\boxed{(MN) // (BC)}$$

2. Pour $x = 10$, on a :

$$AM = x + 2 = 12.$$

Comme les droites (MN) et (BC) sont parallèles, on peut utiliser le théorème de Thalès :

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}.$$

Donc :

$$\frac{MN}{12,6} = \frac{12}{18}.$$

Or :

$$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

Alors :

$$MN = 12,6 \times \frac{2}{3} = 8,4.$$

$$\boxed{MN = 8,4}$$

Exercice 8

1. Les points P, S, Q sont alignés et les points P, T, R sont alignés dans le même ordre.
On compare les deux rapports :

$$\frac{PS}{PQ} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

et

$$\frac{PT}{PR} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

On a donc :

$$\frac{PS}{PQ} = \frac{PT}{PR}.$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès :

$$\boxed{(ST) // (QR)}$$

2. Puisque les droites (ST) et (QR) sont parallèles, les triangles PST et PQR sont semblables.

Le coefficient de réduction est :

$$\frac{PS}{PQ} = \frac{3}{5}.$$

Les aires sont multipliées par le carré du coefficient :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}.$$

L'aire du triangle PST est donc :

$$75 \times \frac{9}{25} = 3 \times 9 = 27.$$

$$\boxed{\mathcal{A}_{PST} = 27 \text{ cm}^2}$$

3. Le pourcentage de l'affiche occupé par la zone PST est :

$$\frac{27}{75} \times 100 = 36.$$

$$\boxed{36\%}$$

Exercice 9

1. Les points V, M, A sont alignés et les points V, N, B sont alignés dans le même ordre.

On compare les deux rapports :

$$\frac{VM}{VA} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

et

$$\frac{VN}{VB} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}.$$

On obtient :

$$\frac{VM}{VA} = \frac{VN}{VB}.$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès :

$$\boxed{(MN) \parallel (AB)}$$

2. Comme les droites (MN) et (AB) sont parallèles, on peut utiliser le théorème de Thalès :

$$\frac{MN}{AB} = \frac{VM}{VA}.$$

Donc :

$$\frac{MN}{36} = \frac{18}{24}.$$

Or :

$$\frac{18}{24} = \frac{3}{4}.$$

Ainsi :

$$MN = 36 \times \frac{3}{4} = 27.$$

$$\boxed{MN = 27 \text{ cm}}$$

3. Le coefficient de réduction entre la petite pyramide et la grande pyramide est :

$$\frac{VM}{VA} = \frac{3}{4}.$$

Pour les volumes, on utilise le cube du coefficient :

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}.$$

Le volume de la petite pyramide est donc :

$$512 \times \frac{27}{64}.$$

Comme :

$$512 \div 64 = 8,$$

on obtient :

$$8 \times 27 = 216.$$

$$\boxed{216 \text{ cm}^3}$$

Exercice 10

1. Les points K, P, L sont alignés et les points K, Q, M sont alignés dans le même ordre.

On compare les deux rapports :

$$\frac{KP}{KL} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

et

$$\frac{KQ}{KM} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}.$$

On a donc :

$$\frac{KP}{KL} = \frac{KQ}{KM}.$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès :

$$\boxed{(PQ) \parallel (LM)}$$

2. Comme les droites (PQ) et (LM) sont parallèles, on utilise le théorème de Thalès :

$$\frac{PQ}{LM} = \frac{KP}{KL}.$$

Donc :

$$\frac{PQ}{48} = \frac{21}{36}.$$

Or :

$$\frac{21}{36} = \frac{7}{12}.$$

Alors :

$$PQ = 48 \times \frac{7}{12} = 4 \times 7 = 28.$$

$$\boxed{PQ = 28 \text{ cm}}$$

3. Les triangles KPQ et KLM sont semblables.

Le coefficient de réduction est :

$$\frac{KP}{KL} = \frac{7}{12}.$$

Les aires sont multipliées par :

$$\left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{49}{144}.$$

L'aire du triangle KPQ est donc :

$$720 \times \frac{49}{144}.$$

Comme :

$$720 \div 144 = 5,$$

on obtient :

$$5 \times 49 = 245.$$

$$\boxed{\mathcal{A}_{KPQ} = 245 \text{ cm}^2}$$

4. Le pourcentage de tissu représenté par le triangle KPQ est :

$$\frac{245}{720} \times 100 \approx 34,03.$$

Arrondi à l'unité :

$$\boxed{34\%}$$