Dérivation et variations

Objectifs du chapitre

À la fin de ce chapitre, il faut savoir :

- déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme ;
- utiliser les dérivées usuelles ;
- dériver une somme et le produit d'une fonction par un réel ;
- étudier le signe d'une fonction dérivée ;
- déduire les variations d'une fonction du signe de sa dérivée ;
- dresser un tableau de variations ;
- déterminer un minimum ou un maximum ;
- interpréter un extremum dans une situation concrète.

1. Fonction dérivée

1.1. Définition

Définition

Soit f une fonction dérivable en tout réel d'un intervalle I.
La fonction qui, à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la **fonction dérivée** de f.
Elle est notée f' :

$$\boxed{f' : x \longmapsto f'(x)}$$

Remarque

Le nombre $f'(x)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x.
Il indique donc localement si la fonction augmente ou diminue.

1.2. Dérivées usuelles

Propriété

Les dérivées suivantes sont à connaître.

Fonction	Expression	Fonction dérivée
Fonction constante	$f(x) = k$, avec $k \in \mathbb{R}$	$\boxed{f'(x) = 0}$
Fonction identité	$f(x) = x$	$\boxed{f'(x) = 1}$
Fonction affine	$f(x) = ax + b$	$\boxed{f'(x) = a}$
Fonction carré	$f(x) = x^2$	$\boxed{f'(x) = 2x}$
Fonction cube	$f(x) = x^3$	$\boxed{f'(x) = 3x^2}$
Fonction puissance	$f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\boxed{f'(x) = nx^{n-1}}$

Exemple

On considère la fonction :

$$f(x) = x^4.$$

On utilise la formule :

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{f'(x) = 4x^3}$$

Exemple

On considère la fonction affine :

$$g(x) = -5x + 7.$$

La dérivée d'une fonction affine $x \mapsto ax + b$ est la fonction constante égale à a.
Donc :

$$\boxed{g'(x) = -5}$$

2. Opérations sur les fonctions dérivées

2.1. Dérivée d'une somme

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.
La fonction $u + v$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'}$$

2.2. Produit par un réel

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel.
La fonction ku est dérivable sur I et :

$$\boxed{(ku)' = ku'}$$

Exemple

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 5x^2 - 3x + 1.$$

On dérive chaque terme :

$$(5x^2)' = 5 \times 2x = 10x,$$

$$(-3x)' = -3,$$

et :

$$1' = 0.$$

Ainsi :

$$f'(x) = 10x - 3 + 0.$$

Donc :

$$\boxed{f'(x) = 10x - 3}$$

Exemple

On considère la fonction :

$$g(x) = 4x^3 - 7x^2 + 6x - 2.$$

On obtient :

$$g'(x) = 4 \times 3x^2 - 7 \times 2x + 6.$$

Donc :

$$\boxed{g'(x) = 12x^2 - 14x + 6}$$

2.3. Expression donnée sous forme d'un produit

Attention

Dans ce chapitre, la formule permettant de dériver directement un produit de deux fonctions n'est pas utilisée.
Lorsqu'une fonction polynôme est donnée sous forme d'un produit, on commence donc par la **développer et la réduire**, puis on dérive l'expression obtenue.

Dériver une expression donnée sous forme d'un produit

Pour dériver une fonction polynôme donnée sous forme d'un produit :

1. on développe le produit ;
2. on réduit l'expression ;
3. on dérive chaque terme.

Exemple

On considère :

$$g(x) = (9x - 7)(4x + 3).$$

On commence par développer :

$$g(x) = 36x^2 + 27x - 28x - 21.$$

Donc :

$$g(x) = 36x^2 - x - 21.$$

On dérive alors :

$$g'(x) = 72x - 1.$$

Ainsi :

$$\boxed{g'(x) = 72x - 1}$$

3. Variations d'une fonction et signe de sa dérivée

3.1. Propriété fondamentale

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

— Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I.

— Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I.

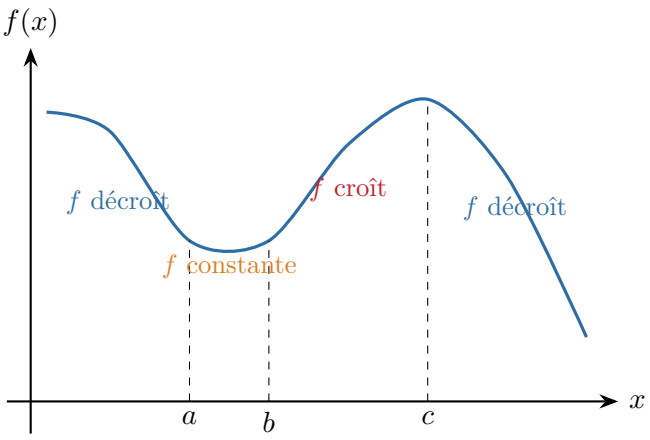
— Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I.

Remarque

Dans la pratique :

— lorsque $f'(x) > 0$, la fonction f est strictement croissante ;

— lorsque $f'(x) < 0$, la fonction f est strictement décroissante.



3.2. Méthode pour étudier les variations

Méthode

Pour étudier les variations d'une fonction f :

1. on calcule la fonction dérivée f' ;
2. on factorise $f'(x)$, lorsque cela est utile ;
3. on étudie le signe de $f'(x)$;
4. on en déduit les variations de f ;
5. on calcule les images utiles pour compléter le tableau.

Exemple

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 3.$$

1. Calcul de la dérivée

$$f'(x) = 6x^2 - 6.$$

2. Factorisation

$$f'(x) = 6(x^2 - 1).$$

Or :

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Donc :

$$\boxed{f'(x) = 6(x - 1)(x + 1)}$$

3. Signe de la dérivée

La dérivée s'annule pour :

$$x = -1 \qquad \text{et} \qquad x = 1.$$

Le coefficient 6 est positif. On obtient donc :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	0		$+$

4. Valeurs particulières

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) + 3.$$

$$f(-1) = -2 + 6 + 3 = 7.$$

Et :

$$f(1) = 2 - 6 + 3 = -1.$$

5. Tableau de variations

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-1	$\nearrow$		

La fonction f est donc :

— croissante sur $]-\infty;-1]$;

— décroissante sur $[-1;1]$;

— croissante sur $[1;+\infty[$.

4. Minimum et maximum

4.1. Définitions

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Dire que f admet un **maximum** M sur I signifie que :

$$f(x) \leq M$$

pour tout $x \in I$, et qu'il existe au moins un réel $a \in I$ tel que :

$$f(a) = M.$$

Définition

Dire que f admet un **minimum** m sur I signifie que :

$$f(x) \geq m$$

pour tout $x \in I$, et qu'il existe au moins un réel $a \in I$ tel que :

$$f(a) = m.$$

4.2. Extremum local

Définition

Une fonction f admet un **maximum local** en a lorsque $f(a)$ est la plus grande valeur prise par f au voisinage de a.
Elle admet un **minimum local** en a lorsque $f(a)$ est la plus petite valeur prise par f au voisinage de a.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert contenant a.
Si f admet un extremum local en a, alors :

$$\boxed{f'(a) = 0}$$

Attention

La condition $f'(a) = 0$ ne suffit pas toujours pour affirmer que f admet un extremum en a.
Il faut étudier le signe de la dérivée de part et d'autre de a.

Exemple

Dans l'exemple précédent :

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 3.$$

La dérivée passe du signe + au signe − en -1.
La fonction f admet donc un maximum local en -1, égal à :

$$\boxed{f(-1) = 7}$$

La dérivée passe du signe − au signe + en 1.
La fonction f admet donc un minimum local en 1, égal à :

$$\boxed{f(1) = -1}$$

5. Maximum ou minimum sur un intervalle fermé

Méthode

Pour déterminer le maximum ou le minimum d'une fonction f sur un intervalle fermé $[a; b]$:

1. on étudie les variations de f sur $[a; b]$;
2. on calcule les valeurs de f aux points où la dérivée s'annule ;
3. on calcule également $f(a)$ et $f(b)$;
4. on compare toutes les valeurs obtenues.

Remarque

Un maximum ou un minimum sur un intervalle fermé peut être atteint :

— en un point intérieur où $f'(x) = 0$;
— ou à une extrémité de l'intervalle.

Exercice type bac

Exercice type bac – Optimisation d'une production

Une entreprise fabrique un produit.
Pour une quantité x comprise entre 0 et 8, le bénéfice réalisé, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction B définie sur $[0;8]$ par :

$$B(x) = -x^3 + 9x^2 + 20.$$

La quantité x est exprimée en centaines d'objets.

1. Calculer $B(0)$ et $B(8)$.
2. Montrer que, pour tout réel $x \in [0;8]$:

$$B'(x) = -3x^2 + 18x.$$

3. Montrer que :

$$B'(x) = 3x(6 - x).$$

4. Étudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[0;8]$.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction B sur $[0;8]$.
6. Déterminer la valeur maximale du bénéfice sur l'intervalle $[0;8]$.
7. Pour quelle quantité d'objets ce bénéfice maximal est-il obtenu ?
8. Interpréter les résultats des deux questions précédentes dans le contexte de l'exercice.

Corrigé de l'exercice type bac

Optimisation d'une production

1. Calculons $B(0)$:

$$B(0) = -0^3 + 9 \times 0^2 + 20.$$

Donc :

$$\boxed{B(0) = 20}$$

Calculons $B(8)$:

$$B(8) = -8^3 + 9 \times 8^2 + 20.$$

$$B(8) = -512 + 9 \times 64 + 20.$$

$$B(8) = -512 + 576 + 20 = 84.$$

Ainsi :

$$\boxed{B(8) = 84}$$

2. On considère :

$$B(x) = -x^3 + 9x^2 + 20.$$

On dérive chaque terme :

$$(-x^3)' = -3x^2,$$

$$(9x^2)' = 18x,$$

et :

$$20' = 0.$$

Donc :

$$\boxed{B'(x) = -3x^2 + 18x}$$

3. On factorise par $3x$:

$$-3x^2 + 18x = 3x(-x + 6).$$

Ainsi :

$$\boxed{B'(x) = 3x(6 - x)}$$

4. Sur l'intervalle $[0; 8]$:

$$3x \geq 0.$$

De plus :

$$6 - x > 0 \quad \text{si} \quad x < 6,$$

$$6 - x = 0 \quad \text{si} \quad x = 6,$$

et :

$$6 - x < 0 \quad \text{si} \quad x > 6.$$

On obtient donc :

$$B'(x) > 0 \quad \text{sur} \quad]0;6[,$$

$$B'(0) = B'(6) = 0,$$

et :

$$B'(x) < 0 \quad \text{sur} \quad]6;8].$$

5. La fonction B est donc croissante sur $[0;6]$, puis décroissante sur $[6;8]$.
Calculons $B(6)$:

$$B(6) = -6^3 + 9 \times 6^2 + 20.$$

$$B(6) = -216 + 9 \times 36 + 20.$$

$$B(6) = -216 + 324 + 20 = 128.$$

Le tableau de variations est donc :

x	0		6		8
$B'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$B(x)$	20	$\nearrow$	128	$\searrow$	84

6. La plus grande valeur prise par la fonction B sur $[0;8]$ est :

$$\boxed{128}$$

Le bénéfice maximal est donc égal à :

$$\boxed{128\,000 \text{ euros}}$$

7. Ce maximum est atteint pour :

$$\boxed{x = 6}$$

Or x est exprimé en centaines d'objets.
La quantité correspondante est donc :

$$6 \times 100 = 600.$$

Ainsi, le bénéfice maximal est obtenu pour une production de :

$$\boxed{600 \text{ objets}}$$

8. Pour maximiser son bénéfice, l'entreprise doit produire 600 objets.
Elle réalise alors un bénéfice maximal de :

$$\boxed{128\,000 \text{ euros}}$$

Retrouve les vidéos et les exercices corrigés sur

cestcompliquelesmaths.fr