



Cours : Suites numériques

1) Généralités sur les suites

Définition

Une **suite numérique** est une liste ordonnée de nombres réels.
On note généralement une suite :

$$(u_n)$$

et ses termes :

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \dots$$

Le nombre u_n est appelé le **terme d'indice n** de la suite.

Remarque

Une suite numérique peut être vue comme une fonction définie sur les entiers naturels.
À chaque entier n , elle associe un nombre réel u_n :

$$n \longmapsto u_n.$$

L'indice n est donc toujours un entier naturel.

Attention

Il ne faut pas confondre :

$$(u_n) \quad \text{et} \quad u_n.$$

(u_n) désigne **toute la suite**.

u_n désigne **un seul terme** de cette suite.

Exemple

On considère la suite des multiples de 7 :

$$0; 7; 14; 21; 28; \dots$$

Si l'on commence à l'indice 0, on a :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 7, \quad u_2 = 14, \quad u_3 = 21.$$

Le terme d'indice 9 est :

$$u_9 = 63.$$

A) Indice et premier terme

Définition

Une suite peut commencer à l'indice 0, mais ce n'est pas obligatoire.
Si une suite est définie à partir d'un entier p , son premier terme est :

$$u_p.$$

On peut alors noter la suite :

$$(u_n)_{n \geq p}.$$

Exemple

On considère la suite définie par :

$$u_n = \frac{1}{n}.$$

Le terme u_0 n'existe pas car on ne peut pas diviser par 0.
La suite est donc définie pour :

$$n \geq 1.$$

Son premier terme est :

$$u_1 = 1.$$

Attention

Il faut être très attentif aux indices.

$$u_{n+1}$$

désigne le **terme qui suit** u_n .

En revanche :

$$u_n + 1$$

désigne le nombre obtenu en ajoutant 1 au terme u_n .

Ce sont deux expressions différentes.

Indice	p	$p + 1$	$p + 2$	$\dots$	n	$n + 1$
Terme	u_p	u_{p+1}	u_{p+2}	$\dots$	u_n	u_{n+1}

B) Représenter une suite

Propriété

Une suite (u_n) peut être représentée graphiquement par des points de coordonnées :

$$(n; u_n).$$

L'abscisse représente l'indice n et l'ordonnée représente le terme u_n .

Exemple

On considère la suite des multiples de 2 :

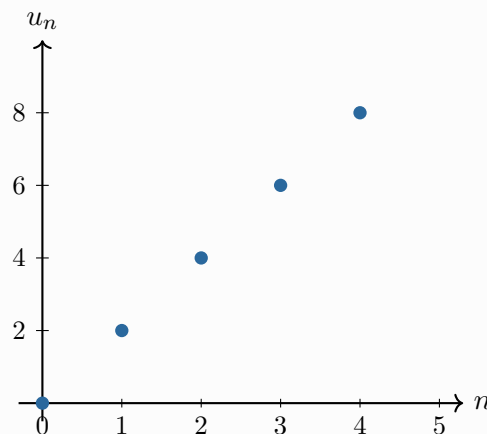
$$u_n = 2n.$$

Les premiers termes sont :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 4, \quad u_3 = 6, \quad u_4 = 8.$$

On représente donc les points :

$$(0; 0), \quad (1; 2), \quad (2; 4), \quad (3; 6), \quad (4; 8).$$



Remarque

On obtient un **nuage de points** et non une courbe continue.
En effet, l'indice n ne peut prendre que des valeurs entières :

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

2) Deux façons de définir une suite

A) Suite définie par une formule explicite

Définition

Une suite est définie par une **formule explicite** lorsque u_n est directement exprimé en fonction de n . Elle est donc de la forme :

$$u_n = f(n).$$

On peut calculer directement n'importe quel terme en remplaçant n par l'indice demandé.

Méthode

Pour calculer un terme d'une suite définie explicitement :

- 1- On écrit la formule de u_n .
- 2- On remplace n par l'indice du terme recherché.
- 3- On effectue le calcul.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 3n + 4.$$

Calculons quelques termes.

$$u_0 = 3 \times 0 + 4 = 4$$

$$u_1 = 3 \times 1 + 4 = 7$$

$$u_5 = 3 \times 5 + 4 = 19$$

et :

$$u_{100} = 3 \times 100 + 4 = 304.$$

Ainsi :

$$\boxed{u_{100} = 304}.$$

Exemple

On considère maintenant :

$$u_n = \sqrt{2n + 6}.$$

On a :

$$u_0 = \sqrt{6}$$

$$u_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$u_2 = \sqrt{10}.$$

Pour calculer u_{100} , il suffit de remplacer directement n par 100 :

$$u_{100} = \sqrt{2 \times 100 + 6} = \boxed{\sqrt{206}}.$$

Remarque

Une formule explicite est pratique car elle permet de calculer directement un terme très éloigné, par exemple u_{100} , sans calculer tous les termes précédents.

B) Suite définie par récurrence

Définition

Une suite est définie **par récurrence** lorsqu'on donne :

- un premier terme ;
- une formule permettant de calculer chaque nouveau terme à partir du précédent.

Par exemple :

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Méthode

Pour calculer les premiers termes d'une suite définie par récurrence :

- 1- On part du premier terme donné.
- 2- On remplace u_n par ce terme dans la relation de récurrence.
- 3- On obtient le terme suivant.
- 4- On recommence autant de fois que nécessaire.

Exemple

On considère la suite définie par :

$$u_0 = 2$$

et :

$$u_{n+1} = 3u_n + 1.$$

Calculons les premiers termes.

$$u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times 2 + 1 = 7$$

$$u_2 = 3u_1 + 1 = 3 \times 7 + 1 = 22$$

$$u_3 = 3u_2 + 1 = 3 \times 22 + 1 = 67.$$

Ainsi :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 7, \quad u_2 = 22, \quad u_3 = 67$$

Attention

Dans une suite définie par récurrence, on ne peut généralement pas calculer directement u_{100} . Pour obtenir u_{100} , il faut d'abord connaître :

$$u_{99},$$

qui dépend de u_{98} , etc.

	Formule explicite	Récurrence
Forme	$u_n = f(n)$	$u_{n+1} = f(u_n)$
Pour calculer u_{20}	On remplace directement n par 20.	Il faut généralement calculer les termes précédents.

3) Sens de variation d'une suite

Définitions

Soit une suite (u_n) .

La suite est **croissante** si, lorsque n augmente, les termes ne diminuent pas :

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

La suite est **décroissante** si, lorsque n augmente, les termes n'augmentent pas :

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

Une suite qui est soit croissante, soit décroissante est appelée **monotone**.

Remarque

Si :

$$u_{n+1} > u_n,$$

la suite est **strictement croissante**.

Si :

$$u_{n+1} < u_n,$$

la suite est **strictement décroissante**.

Exemple

La suite :

$$1; 3; 5; 7; 9; \dots$$

est strictement croissante.

En effet, chaque terme est plus grand que le précédent.

Exemple

La suite définie par :

$$u_n = (-1)^n$$

donne :

$$1; -1; 1; -1; 1; \dots$$

Elle alterne entre 1 et -1 .

Elle n'est donc ni croissante ni décroissante.

A) Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

Propriété

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut calculer :

$$u_{n+1} - u_n.$$

— Si

$$u_{n+1} - u_n \geq 0,$$

alors la suite est croissante.

— Si

$$u_{n+1} - u_n \leq 0,$$

alors la suite est décroissante.

Méthode

Pour utiliser cette méthode :

- 1- On calcule u_{n+1} en remplaçant n par $n + 1$.
- 2- On calcule $u_{n+1} - u_n$.
- 3- On simplifie l'expression.
- 4- On étudie son signe.
- 5- On conclut sur le sens de variation de la suite.

Exemple

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 3n + 4.$$

Calculons u_{n+1} :

$$u_{n+1} = 3(n + 1) + 4 = 3n + 7.$$

Puis :

$$u_{n+1} - u_n = (3n + 7) - (3n + 4).$$

Donc :

$$u_{n+1} - u_n = 3.$$

Or :

$$3 > 0.$$

Ainsi :

$$u_{n+1} > u_n.$$

La suite (u_n) est donc :

strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Exemple

On considère la suite :

$$u_n = -2n + 5.$$

On a :

$$u_{n+1} = -2(n+1) + 5 = -2n + 3.$$

Donc :

$$u_{n+1} - u_n = (-2n + 3) - (-2n + 5) = -2.$$

Comme :

$$-2 < 0,$$

on obtient :

la suite (u_n) est strictement décroissante.

B) Utiliser le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

Propriété

Lorsque tous les termes de la suite sont **strictement positifs**, on peut aussi étudier :

— Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$,
alors $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite est croissante.

— Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$,
alors $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite est décroissante.

Attention

Cette méthode ne doit être utilisée que lorsque les termes concernés sont strictement positifs. Sinon, comparer le quotient à 1 ne permet pas de conclure directement.

Exemple

On considère la suite définie pour $n \geq 1$ par :

$$v_n = \frac{n}{2^n}.$$

Tous les termes sont strictement positifs.

Calculons :

$$v_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}.$$

Alors :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n}.$$

Donc :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{2n}.$$

Comparons ce quotient à 1 :

$$\frac{n+1}{2n} - 1 = \frac{n+1-2n}{2n} = \frac{1-n}{2n}.$$

Pour $n \geq 1$:

$$1 - n \leq 0 \quad \text{et} \quad 2n > 0.$$

Donc :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1.$$

Ainsi :

$$(v_n) \text{ est décroissante pour } n \geq 1.$$

C) Utiliser les variations d'une fonction

Propriété

Supposons qu'une suite soit définie par :

$$u_n = f(n).$$

Alors :

- si f est croissante sur l'intervalle considéré, la suite (u_n) est croissante ;
- si f est décroissante sur l'intervalle considéré, la suite (u_n) est décroissante.

Remarque

Cette méthode est particulièrement utile lorsque l'on connaît déjà les variations de la fonction f étudiée.

Exemple

On considère la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1}{n}.$$

On introduit la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

La fonction inverse est strictement décroissante sur :

$$]0; +\infty[.$$

Comme :

$$u_n = f(n),$$

la suite (u_n) est donc strictement décroissante pour $n \geq 1$.

$\left(\frac{1}{n}\right)$ est strictement décroissante.

4) Choisir une méthode pour étudier les variations

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une suite, plusieurs méthodes sont possibles.

Méthode 1 : calculer $u_{n+1} - u_n$

C'est souvent la méthode la plus simple.

$$u_{n+1} - u_n \begin{cases} \geq 0 & \Rightarrow \text{suite croissante,} \\ \leq 0 & \Rightarrow \text{suite décroissante.} \end{cases}$$

Méthode 2 : calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

À utiliser lorsque les termes sont strictement positifs.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \begin{cases} \geq 1 & \Rightarrow \text{suite croissante,} \\ \leq 1 & \Rightarrow \text{suite décroissante.} \end{cases}$$

Méthode 3 : utiliser une fonction

Si :

$$u_n = f(n),$$

on peut étudier les variations de f .

Remarque

Calculer quelques premiers termes peut permettre de **conjecturer** le sens de variation d'une suite. Mais une conjecture n'est pas une démonstration.

Pour prouver le sens de variation, il faut utiliser une méthode mathématique valable pour tous les indices concernés.