Croissance exponentielle

Suites géométriques et fonctions exponentielles

Objectifs du chapitre

À la fin de ce chapitre, il faut savoir :

- reconnaître une suite géométrique et déterminer sa raison ;
- calculer des termes d'une suite géométrique ;
- exprimer le terme général d'une suite géométrique ;
- étudier les variations d'une suite géométrique positive ;
- modéliser une évolution en pourcentage ;
- reconnaître et utiliser une fonction exponentielle ;
- utiliser les règles de calcul sur les puissances ;
- déterminer un taux d'évolution moyen ;
- résoudre un problème de seuil à l'aide d'un tableau ou d'un algorithme.

1. Reconnaître et utiliser une suite géométrique

1.1. Définition

Définition

Une suite (u_n) est une **suite géométrique** lorsqu'il existe un nombre réel q tel que, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{u_{n+1} = q\,u_n}$$

Le nombre q est appelé la **raison** de la suite.

Remarque

Dans une suite géométrique, on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre. Lorsque $u_n \neq 0$, on a :

$$\boxed{q = \frac{u_{n+1}}{u_n}}$$

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 0,5u_n.$$

La suite est géométrique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison :

$$\boxed{q = 0,5}$$

Calculons ses premiers termes :

$$u_1 = 0,5 \times 8 = 4,$$

$$u_2 = 0,5 \times 4 = 2,$$

$$u_3 = 0,5 \times 2 = 1.$$

1.2. Calculer les premiers termes

Suite définie par récurrence

Pour calculer les premiers termes d'une suite définie par :

$$u_{n+1} = q\,u_n,$$

on utilise successivement la relation de récurrence :

$$u_1 = q\,u_0,$$

puis :

$$u_2 = q\,u_1,$$

et ainsi de suite.

Exemple

On considère la suite géométrique définie par :

$$u_0 = 7 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 0,5u_n.$$

On obtient :

$$u_1 = 0,5 \times 7 = 3,5,$$

puis :

$$u_2 = 0,5 \times 3,5 = 1,75.$$

Ainsi :

$$\boxed{u_0 = 7, \quad u_1 = 3,5, \quad u_2 = 1,75}$$

1.3. Expression du terme général

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Pour tout entier naturel n :

$$\boxed{u_n = u_0 q^n}$$

Remarque

Lorsque la suite commence au rang 1, avec un premier terme u_1, on a, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\boxed{u_n = u_1 q^{n-1}}$$

Exemple

On considère une suite géométrique de premier terme :

$$u_0 = 2$$

et de raison :

$$q = 3.$$

Alors, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{u_n = 2 \times 3^n}$$

En particulier :

$$u_4 = 2 \times 3^4.$$

Comme :

$$3^4 = 81,$$

on obtient :

$$\boxed{u_4 = 162}$$

Exemple

On considère une suite géométrique (v_n) définie à partir du rang 1 par :

$$v_1 = 4 \qquad \text{et} \qquad q = 0,25.$$

Alors, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\boxed{v_n = 4 \times 0,25^{n-1}}$$

2. Modéliser une évolution en pourcentage

2.1. Coefficient multiplicateur

Propriété

Augmenter une quantité de $t\,\%$ revient à la multiplier par :

$$\boxed{1 + \frac{t}{100}}$$

Diminuer une quantité de $t\,\%$ revient à la multiplier par :

$$\boxed{1 - \frac{t}{100}}$$

Exemple

Une population augmente de 4 % par an.
Le coefficient multiplicateur associé est :

$$1 + \frac{4}{100} = 1,04.$$

Si u_n représente la population après n années, alors :

$$\boxed{u_{n+1} = 1,04u_n}$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison :

$$\boxed{q = 1,04}$$

Exemple

La valeur d'un appareil diminue de 15 % par an.
Le coefficient multiplicateur associé est :

$$1 - \frac{15}{100} = 0,85.$$

Si v_n désigne la valeur de l'appareil après n années, alors :

$$\boxed{v_{n+1} = 0,85v_n}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison :

$$\boxed{q = 0,85}$$

2.2. Reconnaître une croissance exponentielle

Définition

Une évolution est dite **exponentielle discrète** lorsque la grandeur étudiée est multipliée par un même nombre à intervalles réguliers.
Une telle évolution peut être modélisée par une suite géométrique.

Remarque

Il ne faut pas confondre :

- une variation absolue constante, modélisée par une fonction affine ;
- une variation relative constante, modélisée par une suite géométrique.

Par exemple :

- ajouter 200 euros chaque année correspond à une croissance linéaire ;
- augmenter de 2 % chaque année correspond à une croissance exponentielle.

3. Sens de variation d'une suite géométrique positive

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme strictement positif.

- Si $q > 1$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante.

Exemple

On considère la suite définie par :

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 4u_n.$$

La suite est géométrique de raison :

$$q = 4.$$

Comme :

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad 4 > 1,$$

la suite (u_n) est strictement croissante.

Exemple

On considère la suite définie par :

$$v_0 = 6 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 0,8v_n.$$

La suite est géométrique de raison :

$$q = 0,8.$$

Comme :

$$v_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad 0 < 0,8 < 1,$$

la suite (v_n) est strictement décroissante.

Remarque

Lorsque la raison q est négative, les termes changent de signe. La suite n'est alors, en général, ni croissante ni décroissante.
Dans les situations de croissance exponentielle étudiées dans ce chapitre, la raison est généralement strictement positive.

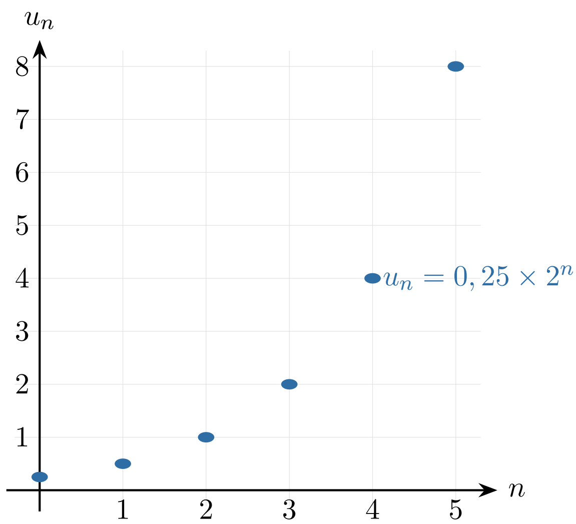
3.1. Représentation graphique

Propriété

Dans un repère, une suite (u_n) est représentée par les points :

$$A_n(n; u_n).$$

Pour une suite géométrique, ces points ne sont généralement pas alignés.



Remarque

La variable n est un entier naturel. La représentation graphique d'une suite est donc constituée de points isolés.
On ne doit pas relier les points pour représenter la suite elle-même.

4. Fonctions exponentielles

4.1. Définition

Définition

Soit a un nombre réel strictement positif.
La fonction exponentielle de base a est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{f(x) = a^x}$$

Propriété

Pour tout réel x :

$$a^x > 0.$$

En particulier, une fonction exponentielle prend toujours des valeurs strictement positives.

Valeur en zéro

Pour tout réel $a > 0$:

$$\boxed{a^0 = 1}$$

La courbe de la fonction $x \mapsto a^x$ passe donc par le point :

$$\boxed{(0; 1)}$$

4.2. Lien avec les suites géométriques

Propriété

La suite géométrique définie par :

$$u_n = u_0 q^n$$

est associée à la fonction exponentielle :

$$f(x) = u_0 q^x.$$

La fonction prolonge le modèle discret lorsque l'exposant peut prendre des valeurs réelles.

Remarque

Une suite géométrique modélise une évolution exponentielle **discrète**, car son rang n est entier.
Une fonction de la forme :

$$f(x) = k\, a^x$$

peut modéliser une évolution exponentielle **continue**, car la variable x peut prendre toutes les valeurs réelles d'un intervalle.

5. Variations d'une fonction exponentielle

Propriété

Soit $a > 0$.

- Si $a > 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $0 < a < 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est constante et égale à 1.

Propriété

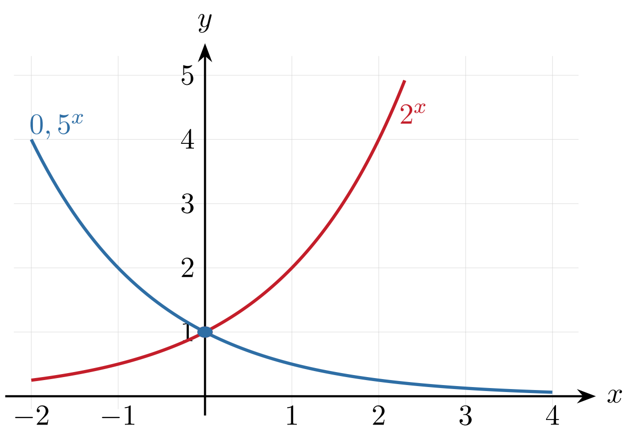
Soit $k > 0$ et $a > 0$.
La fonction définie par :

$$f(x) = k\, a^x$$

a le même sens de variation que la fonction $x \mapsto a^x$.
De plus :

$$\boxed{f(0) = k}$$

La courbe passe donc par le point $(0; k)$.



6. Règles de calcul sur les puissances

Propriété

Soient $a > 0$, $b > 0$ et x, y deux nombres réels.

$$\boxed{a^0 = 1}$$

$$\boxed{a^{-x} = \frac{1}{a^x}}$$

$$\boxed{a^x \times a^y = a^{x+y}}$$

$$\boxed{\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}}$$

$$\boxed{(a^x)^y = a^{xy}}$$

$$\boxed{a^x b^x = (ab)^x}$$

$$\boxed{\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x}$$

Exemple

On simplifie :

$$2^{1,5} \times 2^{3,4}.$$

Les deux puissances ont la même base, donc :

$$2^{1,5} \times 2^{3,4} = 2^{1,5+3,4}.$$

Ainsi :

$$\boxed{2^{1,5} \times 2^{3,4} = 2^{4,9}}$$

Exemple

On simplifie :

$$(3^2)^{2,5}.$$

On utilise la propriété :

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Ainsi :

$$(3^2)^{2,5} = 3^{2\times 2,5} = 3^5.$$

Donc :

$$\boxed{(3^2)^{2,5} = 3^5}$$

7. Racine n-ième

Propriété

Soient $c \geq 0$ et n un entier naturel non nul.
L'équation :

$$x^n = c$$

admet une unique solution réelle positive.
Cette solution est :

$$\boxed{x = c^{\frac{1}{n}}}$$

Exemple

La solution positive de l'équation :

$$x^7 = 15$$

est :

$$\boxed{x = 15^{\frac{1}{7}}}$$

Remarque

Pour $n = 2$, on retrouve la racine carrée :

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \qquad \text{pour tout } a \geq 0.$$

8. Taux d'évolution moyen

8.1. Définition

Définition

Une grandeur subit une évolution globale de coefficient multiplicateur $C > 0$ pendant n périodes.
Le coefficient multiplicateur moyen par période est le nombre $c > 0$ tel que :

$$c^n = C.$$

On a donc :

$$\boxed{c = C^{\frac{1}{n}}}$$

Le taux d'évolution moyen est alors :

$$\boxed{t_{\text{moyen}} = C^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Remarque

Si le taux global est noté t, alors le coefficient multiplicateur global est :

$$C = 1 + t.$$

Le taux moyen sur n périodes est donc :

$$\boxed{t_{\text{moyen}} = (1 + t)^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Calculer un taux d'évolution moyen

Pour calculer un taux d'évolution moyen :

1. on détermine le nombre n de périodes ;
2. on calcule le coefficient multiplicateur global C ;
3. on calcule :
$$C^{\frac{1}{n}};$$
4. on soustrait 1 ;
5. on convertit le résultat en pourcentage.

Exemple

Une grandeur augmente globalement de 32 % en trois périodes.
Le coefficient multiplicateur global est :

$$C = 1 + \frac{32}{100} = 1,32.$$

Le taux moyen est :

$$t_{\text{moyen}} = 1,32^{\frac{1}{3}} - 1.$$

À la calculatrice :

$$1,32^{\frac{1}{3}} - 1 \approx 0,0969.$$

Ainsi, le taux d'évolution moyen est d'environ :

$$\boxed{9,69\,\%}$$

9. Déterminer un seuil

Déterminer un seuil par essais successifs

Pour déterminer le plus petit entier n tel que :

$$u_n \geq A,$$

on peut calculer successivement les termes de la suite jusqu'à atteindre ou dépasser la valeur A.
On vérifie ensuite que :

$$u_{n-1} < A \qquad \text{et} \qquad u_n \geq A.$$

Exemple

On considère la suite définie par :

$$u_0 = 1\,000 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 1,05u_n.$$

On cherche le premier rang n tel que :

$$u_n \geq 1\,200.$$

On calcule :

$$u_1 = 1\,050,$$

$$u_2 = 1\,102,50,$$

$$u_3 = 1\,157,625,$$

$$u_4 \approx 1\,215,51.$$

Comme :

$$u_3 < 1\,200 \qquad \text{et} \qquad u_4 \geq 1\,200,$$

le seuil est atteint pour la première fois au rang :

$$\boxed{n = 4}$$

Algorithme de seuil

L'algorithme suivant renvoie le premier rang n pour lequel $u_n \geq A$.

```
u = valeur_initiale
n = 0

while u < A:
    u = q * u
    n = n + 1

print(n)
```

Exercices type bac

Exercice type bac 1 – Fréquentation d'un parc

En 2025, un parc de loisirs accueille 40 000 visiteurs.
La direction estime que la fréquentation augmentera de 3 % chaque année.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de visiteurs prévu pour l'année $2025 + n$.
On a donc :

$$u_0 = 40\,000.$$

1. Calculer u_1 et interpréter le résultat.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. En déduire la nature de la suite (u_n) et préciser sa raison.
4. Exprimer u_n en fonction de n.
5. Calculer le nombre de visiteurs prévu en 2030. Arrondir le résultat à l'unité.
6. On considère la fonction Python suivante :

```
def seuil():
    u = 40000
    n = 0
    while u < 50000:
        u = 1.03 * u
        n = n + 1
    return n
```

   Expliquer ce que renvoie cette fonction dans le contexte de l'exercice.

7. À l'aide des valeurs suivantes :

$$1,03^7 \approx 1,230 \qquad \text{et} \qquad 1,03^8 \approx 1,267,$$

   déterminer à partir de quelle année le nombre de visiteurs dépassera 50 000.

Exercice type bac 2 – Valeur d'un véhicule

Un véhicule neuf est acheté au prix de 30 000 euros.
On estime que sa valeur diminue de 12 % chaque année.
Pour tout entier naturel n, on note v_n la valeur du véhicule, en euros, n années après son achat.
On a :

$$v_0 = 30\,000.$$

1. Déterminer le coefficient multiplicateur correspondant à une diminution de 12 %.
2. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
3. Justifier que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
4. Exprimer v_n en fonction de n.
5. Calculer la valeur du véhicule après quatre années. Arrondir à l'euro.
6. Étudier le sens de variation de la suite (v_n).
7. Après quatre années, le véhicule a globalement perdu une certaine proportion de sa valeur initiale. Calculer le taux global de diminution sur les quatre années.
8. Un autre véhicule perd globalement 40 % de sa valeur en trois ans. Déterminer son taux annuel moyen de diminution. Arrondir à $0,1\,\%$.

Corrigé des exercices type bac

Corrigé de l'exercice type bac 1

1. Une augmentation de 3 % correspond au coefficient multiplicateur :

$$1 + \frac{3}{100} = 1,03.$$

Ainsi :

$$u_1 = 40\,000 \times 1,03.$$

$$u_1 = 41\,200.$$

On prévoit donc :

$$\boxed{41\,200 \text{ visiteurs en } 2026}$$

2. Chaque année, le nombre de visiteurs est multiplié par $1,03$.
Pour tout entier naturel n :

$$\boxed{u_{n+1} = 1,03u_n}$$

3. La suite (u_n) est donc géométrique de premier terme :

$$u_0 = 40\,000$$

et de raison :

$$\boxed{q = 1,03}$$

4. Pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 q^n.$$

Ainsi :

$$\boxed{u_n = 40\,000 \times 1,03^n}$$

5. L'année 2030 correspond à :

$$2025 + n = 2030.$$

Donc :

$$n = 5.$$

On calcule :

$$u_5 = 40\,000 \times 1,03^5.$$

Or :

$$1,03^5 \approx 1,159274.$$

Donc :

$$u_5 \approx 40\,000 \times 1,159274.$$

$$u_5 \approx 46\,371.$$

Le nombre de visiteurs prévu en 2030 est donc d'environ :

$$\boxed{46\,371}$$

6. La fonction calcule successivement les termes de la suite jusqu'à ce que le nombre de visiteurs atteigne ou dépasse 50 000.
   Elle renvoie donc le plus petit entier naturel n tel que :

   $$u_n \geq 50\,000.$$

   Dans le contexte, elle donne le nombre d'années après 2025 nécessaire pour atteindre au moins 50 000 visiteurs.
7. On compare les termes au seuil de 50 000.
   Pour $n = 7$:

   $$u_7 = 40\,000 \times 1,03^7 \approx 40\,000 \times 1,230.$$

   $$u_7 \approx 49\,200.$$

   Donc :

   $$u_7 < 50\,000.$$

   Pour $n = 8$:

   $$u_8 = 40\,000 \times 1,03^8 \approx 40\,000 \times 1,267.$$

   $$u_8 \approx 50\,680.$$

   Donc :

   $$u_8 > 50\,000.$$

   Le seuil est dépassé pour la première fois au rang 8.
   L'année correspondante est :

   $$2025 + 8 = 2033.$$

   Ainsi, le nombre de visiteurs dépassera 50 000 à partir de :

   $$\boxed{2033}$$

Corrigé de l'exercice type bac 2

1. Une diminution de 12 % correspond au coefficient multiplicateur :

   $$1 - \frac{12}{100} = 0,88.$$

   Ainsi :

$$\boxed{0,88}$$

2. Chaque année, la valeur du véhicule est multipliée par $0,88$.
   Donc, pour tout entier naturel n :
   $$\boxed{v_{n+1} = 0,88v_n}$$
3. La suite (v_n) est géométrique de premier terme :
   $$v_0 = 30\,000$$
   et de raison :
   $$\boxed{q = 0,88}$$
4. Pour tout entier naturel n :
   $$v_n = v_0q^n.$$
   Ainsi :
   $$\boxed{v_n = 30\,000 \times 0,88^n}$$
5. Après quatre années :
   $$v_4 = 30\,000 \times 0,88^4.$$
   Or :
   $$0,88^4 = 0,59969536.$$
   Donc :
   $$v_4 = 30\,000 \times 0,59969536.$$
   $$v_4 = 17\,990,8608.$$
   Arrondie à l'euro, la valeur du véhicule est :
   $$\boxed{17\,991 \text{ euros}}$$
6. On a :
   $$v_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad 0 < 0,88 < 1.$$
   Par conséquent, la suite (v_n) est strictement décroissante.
   $$\boxed{\text{La valeur du véhicule diminue chaque année.}}$$
7. Le coefficient multiplicateur global sur quatre années est :
   $$0,88^4 \approx 0,5997.$$
   Le taux global correspondant est :
   $$0,5997 - 1 = -0,4003.$$
   Cela correspond à une diminution d'environ :
   $$\boxed{40,03\,\%}$$

8. Une diminution globale de 40 % correspond au coefficient multiplicateur global :

$$C = 1 - \frac{40}{100} = 0,60.$$

Si t désigne le taux annuel moyen, alors :

$$(1+t)^3 = 0,60.$$

Donc :

$$1 + t = 0,60^{\frac{1}{3}}.$$

Ainsi :

$$t = 0,60^{\frac{1}{3}} - 1.$$

À la calculatrice :

$$t \approx -0,1566.$$

Cela correspond à une diminution annuelle moyenne d'environ :

$$\boxed{15,7\,\%}$$

Retrouve les vidéos et les exercices corrigés sur

`cestcompliquelesmaths.fr`