



Cours : Étude des fonctions polynomiales

1) Rappels sur les fonctions du second degré

Définition

Une fonction polynôme du second degré est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a , b et c sont des réels avec :

$$a \neq 0.$$

Cette écriture est appelée la **forme développée**.

Propriétés

La courbe représentative d'une fonction du second degré est une **parabole**.

— Si :

$$a > 0,$$

la parabole est tournée vers le haut.

— Si :

$$a < 0,$$

la parabole est tournée vers le bas.

Son sommet est :

$$S(\alpha; \beta)$$

avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

et :

$$\beta = f(\alpha).$$

Son axe de symétrie est la droite :

$$x = \alpha.$$

Remarque

La parabole coupe toujours l'axe des ordonnées au point :

$$(0; c).$$

En revanche, elle peut couper l'axe des abscisses :

- en deux points ;
- en un seul point ;
- ou ne pas le couper.

2) Forme canonique

Propriété

Toute fonction du second degré :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

et :

$$\beta = f(\alpha).$$

Cette écriture est appelée la **forme canonique**.

Remarque

La forme canonique permet de lire directement les coordonnées du sommet :

$$S(\alpha; \beta).$$

3) Variations d'une fonction du second degré

Propriété

Soit :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec :

$$a \neq 0.$$

On pose :

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

et :

$$\beta = f(\alpha).$$

Si :

$$a > 0,$$

alors f est strictement décroissante sur :

$$]-\infty; \alpha]$$

puis strictement croissante sur :

$$[\alpha; +\infty[.$$

La fonction admet un minimum égal à :

$$\beta$$

atteint pour :

$$x = \alpha.$$

Si :

$$a < 0,$$

alors f est strictement croissante sur :

$$]-\infty; \alpha]$$

puis strictement décroissante sur :

$$[\alpha; +\infty[.$$

La fonction admet un maximum égal à :

$$\beta$$

atteint pour :

$$x = \alpha.$$

Méthode

Pour étudier les variations d'une fonction du second degré :

1- On identifie a , b et c .

2- On calcule :

$$\alpha = -\frac{b}{2a}.$$

3- On calcule :

$$\beta = f(\alpha).$$

4- On regarde le signe de a .

5- On en déduit les variations ainsi que le minimum ou le maximum.

Exemple – Énoncé

Soit :

$$f(x) = -x^2 + 4x.$$

- a) Calculer les coordonnées du sommet.
- b) Déterminer si f possède un minimum ou un maximum.
- c) Donner les variations de f .

Exemple – Résolution

On a :

$$a = -1, \quad b = 4, \quad c = 0.$$

Calculons :

$$\alpha = -\frac{4}{2 \times (-1)} = 2.$$

Puis :

$$\beta = f(2) = -2^2 + 4 \times 2.$$

Donc :

$$\beta = -4 + 8 = 4.$$

Ainsi :

$$\boxed{S(2; 4)}.$$

Comme :

$$a = -1 < 0,$$

la parabole est tournée vers le bas.

La fonction possède donc un maximum égal à :

$$\boxed{4}$$

atteint pour :

$$\boxed{x = 2}.$$

Ainsi, f est :

$$\boxed{\text{croissante sur }] - \infty; 2]}$$

puis :

$$\boxed{\text{décroissante sur } [2; +\infty[}.$$

4) Factoriser un trinôme

Propriété

Soit :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec :

$$a \neq 0.$$

On calcule :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Si $\Delta > 0$

Le trinôme possède deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 et :

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}.$$

Si $\Delta = 0$

Le trinôme possède une racine double x_0 et :

$$\boxed{f(x) = a(x - x_0)^2}.$$

Si $\Delta < 0$

Le trinôme ne possède aucune racine réelle et ne peut pas être factorisé en produit de facteurs du premier degré sur $\mathbb{R}$.

Méthode

Pour factoriser un trinôme :

1- On calcule :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

2- Si $\Delta > 0$, on calcule les deux racines et on écrit :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

3- Si $\Delta = 0$, on calcule la racine double et on écrit :

$$f(x) = a(x - x_0)^2.$$

4- Si $\Delta < 0$, aucune factorisation réelle n'est possible.

Exemple

Soit :

$$f(x) = x^2 - 7x + 10.$$

On a :

$$a = 1, \quad b = -7, \quad c = 10.$$

Calculons :

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10.$$

Donc :

$$\Delta = 49 - 40 = 9.$$

Comme :

$$\Delta > 0,$$

il existe deux racines :

$$x_1 = \frac{7-3}{2} = 2$$

et :

$$x_2 = \frac{7+3}{2} = 5.$$

Donc :

$$f(x) = (x-2)(x-5).$$

5) Signe d'un trinôme

A) Cas $\Delta > 0$

Propriété

Supposons que :

$$\Delta > 0.$$

Le trinôme possède deux racines réelles distinctes.

On les note ici de façon à avoir :

$$x_1 < x_2.$$

Alors le signe de :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

est :

- le **même signe que a** à l'extérieur des racines ;
- le **signe contraire de a** entre les deux racines.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a

Remarque

On peut retenir :

à l'extérieur : signe de a

et :

à l'intérieur : signe contraire .

Exemple

On reprend :

$$f(x) = x^2 - 7x + 10.$$

Nous avons trouvé :

$$x_1 = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = 5.$$

De plus :

$$a = 1 > 0.$$

Le trinôme est donc positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles :

x	$-\infty$	2		5	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0	+

B) Cas $\Delta = 0$

Propriété

Si :

$$\Delta = 0,$$

le trinôme possède une racine double :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

On a :

$$f(x) = a(x - x_0)^2.$$

Comme :

$$(x - x_0)^2 \geq 0,$$

$f(x)$ possède le même signe que a pour tout :

$$x \neq x_0.$$

Et :

$$f(x_0) = 0.$$

Ainsi :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a

Exemple

Étudions le signe de :

$$f(x) = -9x^2 + 6x - 1.$$

On a :

$$a = -9, \quad b = 6, \quad c = -1.$$

Calculons :

$$\Delta = 6^2 - 4 \times (-9) \times (-1).$$

Donc :

$$\Delta = 36 - 36 = 0.$$

La racine double est :

$$x_0 = -\frac{6}{2 \times (-9)} = \frac{1}{3}.$$

Comme :

$$a = -9 < 0,$$

le trinôme est négatif partout sauf en :

$$x = \frac{1}{3},$$

où il s'annule.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$-$

C) Cas $\Delta < 0$

Propriété

Si :

$$\Delta < 0,$$

le trinôme ne possède aucune racine réelle.

Il ne s'annule donc jamais.

Son signe est toujours celui de a .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

Exemple

Soit :

$$f(x) = 2x^2 + x + 3.$$

On calcule :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 3.$$

Donc :

$$\Delta = 1 - 24 = -23.$$

Ainsi :

$$\Delta < 0.$$

Comme :

$$a = 2 > 0,$$

on a :

$$f(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

6) Méthode : déterminer le signe d'un trinôme

Méthode

Pour déterminer le signe de :

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

on procède ainsi :

1- On calcule :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

2- On regarde le signe de Δ .

3- Si $\Delta > 0$, on calcule les deux racines et on les range dans l'ordre croissant.

4- On regarde le signe de a .

5- On construit le tableau de signes.

Attention

Lorsque $\Delta > 0$, pour construire un tableau de signes lisible, on range toujours les deux racines dans l'ordre :

$$x_1 < x_2.$$

Il ne faut donc pas se fier uniquement aux formules portant les noms x_1 et x_2 : on compare les deux valeurs obtenues avant de construire le tableau.

7) Résoudre une inéquation du second degré

Méthode

Pour résoudre une inéquation comme :

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0,$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$

ou :

$$ax^2 + bx + c \leq 0,$$

on procède ainsi :

- 1- On étudie le signe du trinôme.
- 2- On construit son tableau de signes.
- 3- On repère les intervalles où le signe demandé est vérifié.
- 4- On fait attention aux racines :
 - elles sont incluses avec $\leq$ ou $\geq$;
 - elles sont exclues avec $<$ ou $>$.

Exemple

Réolvons :

$$x^2 - 7x + 10 < 0.$$

Nous savons que les racines sont :

$$2 \quad \text{et} \quad 5.$$

Comme :

$$a = 1 > 0,$$

le trinôme est négatif entre ses deux racines.

Donc :

$$\boxed{2 < x < 5}.$$

Autrement dit :

$$\boxed{x \in]2; 5[}.$$

Exemple

Réolvons :

$$-9x^2 + 6x - 1 < 0.$$

Nous avons vu que :

$$\Delta = 0$$

et que la racine double vaut :

$$x_0 = \frac{1}{3}.$$

Comme :

$$a = -9 < 0,$$

le trinôme est strictement négatif pour tout réel différent de :

$$\frac{1}{3}.$$

Ainsi :

$$x \in]-\infty; \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}; +\infty[.$$

8) Exemple type complet

Exemple – Énoncé

On considère :

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 6.$$

- 1) Calculer les coordonnées du sommet de la parabole.
- 2) Déterminer les variations de f .
- 3) Calculer le discriminant.
- 4) Factoriser $f(x)$.
- 5) Donner le tableau de signes de f .
- 6) Résoudre :

$$f(x) \geq 0.$$

Exemple – Résolution

On a :

$$a = -2, \quad b = 8, \quad c = -6.$$

1) Sommet

$$\alpha = -\frac{8}{2 \times (-2)} = 2.$$

Puis :

$$\beta = f(2) = -2 \times 4 + 8 \times 2 - 6.$$

Donc :

$$\beta = -8 + 16 - 6 = 2.$$

Ainsi :

$$\boxed{S(2; 2)}.$$

2) Variations

Comme :

$$a = -2 < 0,$$

f est croissante sur :

$$]-\infty; 2]$$

puis décroissante sur :

$$[2; +\infty[.$$

Elle admet un maximum égal à :

$$\boxed{2}.$$

3) Discriminant

$$\Delta = 8^2 - 4 \times (-2) \times (-6).$$

Donc :

$$\Delta = 64 - 48 = 16.$$

Ainsi :

$$\boxed{\Delta = 16}.$$

4) Factorisation

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{16}}{-4} = 3$$

et :

$$x_2 = \frac{-8 + \sqrt{16}}{-4} = 1.$$

On les range dans l'ordre croissant :

$$1 < 3.$$

Donc :

9) Formules à retenir

Sommet et forme canonique

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$\beta = f(\alpha)$$

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Variations

Si :

$$a > 0,$$

alors :

f décroît puis croît

et admet un minimum égal à :

$$\beta.$$

Si :

$$a < 0,$$

alors :

f croît puis décroît

et admet un maximum égal à :

$$\beta.$$

Factorisation

Si :

$$\Delta > 0,$$

alors :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Si :

$$\Delta = 0,$$

alors :

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

Si :

$$\Delta < 0,$$

le trinôme ne se factorise pas en facteurs du premier degré sur $\mathbb{R}$.

Signe du trinôme

Si :

$$\Delta > 0,$$

et si :

$$x_1 < x_2,$$

alors :

extérieur des racines $\implies$ signe de a

entre les racines $\implies$ signe contraire de a

Cas particuliers

Si :

$$\Delta = 0,$$

f est du signe de a sauf à la racine double où :

$$f(x_0) = 0.$$

Si :

$$\Delta < 0,$$

alors :

$f(x)$ est toujours du signe de a .