



Cours : Variation linéaire

Objectifs du chapitre

À la fin de ce chapitre, il faut savoir :

- reconnaître une suite arithmétique et déterminer sa raison ;
- passer d'un terme au suivant à l'aide de la relation de récurrence ;
- calculer directement un terme d'une suite arithmétique ;
- déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique ;
- représenter graphiquement une suite arithmétique ;
- reconnaître une fonction affine et identifier son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine ;
- tracer la représentation graphique d'une fonction affine ;
- déterminer l'expression d'une fonction affine à partir de deux points ;
- déterminer le sens de variation d'une fonction affine ;
- comprendre le lien entre une suite arithmétique et une fonction affine.

1) Suites arithmétiques

A) Définition

Définition

Une suite (u_n) est **arithmétique** lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre.

Ce nombre est appelé la **raison** de la suite et est noté r .

$$u_{n+1} = u_n + r$$

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3$$

Remarque

La raison est la différence entre deux termes consécutifs :

$$r = u_{n+1} - u_n$$

Exemple

On considère la suite :

$$10; 13; 16; 19; \dots$$

On passe toujours d'un terme au suivant en ajoutant 3.

$$10 \xrightarrow{+3} 13 \xrightarrow{+3} 16 \xrightarrow{+3} 19$$

La suite est donc arithmétique de raison :

$$r = 3.$$

B) Relation de récurrence

Définition

La relation :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

est appelée la **relation de récurrence** de la suite.

Elle permet de calculer un terme à partir du terme précédent.

Exemple

Une entreprise dispose d'un budget de :

$$5000 \text{ €}$$

la première année.

Chaque année, le budget augmente de :

$$300 \text{ €}.$$

On note u_n le budget après n années.

On a :

$$u_0 = 5000.$$

Puis :

$$5000 \xrightarrow{+300} 5300 \xrightarrow{+300} 5600 \xrightarrow{+300} 5900$$

Ainsi :

$$u_{n+1} = u_n + 300.$$

C) Calculer directement un terme

Propriété

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r , alors :

$$u_n = u_0 + nr$$

Remarque

Dans la formule :

$$u_n = u_0 + nr,$$

on part de u_0 et on effectue n fois l'ajout de r .

Exemple

Avec :

$$u_0 = 5000 \quad \text{et} \quad r = 300,$$

on a :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Donc :

$$u_n = 5000 + 300n.$$

Par exemple :

$$u_8 = 5000 + 300 \times 8.$$

Donc :

$$u_8 = 7400.$$

Ainsi :

$$u_8 = 7400.$$

Propriété

Si l'on connaît un terme u_p , alors :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Exemple

On sait que :

$$u_4 = 20$$

et :

$$r = 5.$$

Calculons u_{10} :

$$u_{10} = u_4 + (10 - 4) \times 5.$$

Donc :

$$u_{10} = 20 + 30.$$

Ainsi :

$$u_{10} = 50.$$

Propriété

Dans une suite arithmétique :

$$\text{dernier terme} = \text{premier terme} + (\text{nombre de termes} - 1) \times r$$

Exemple

Une suite arithmétique comporte 10 termes.

Son premier terme vaut :

$$4$$

et sa raison vaut :

$$2.$$

Alors :

$$\text{dernier terme} = 4 + (10 - 1) \times 2.$$

Donc :

$$\text{dernier terme} = 22.$$

D) Sens de variation

Propriété

Le sens de variation d'une suite arithmétique dépend uniquement du signe de sa raison r .

$$r > 0 \implies \text{suite strictement croissante}$$

$$r < 0 \implies \text{suite strictement décroissante}$$

$$r = 0 \implies \text{suite constante}$$

Exemple

On considère :

$$u_{n+1} = u_n - 4.$$

La raison vaut :

$$r = -4.$$

Comme :

$$-4 < 0,$$

la suite est :

$$\text{strictement décroissante.}$$

E) Représentation graphique

Propriété

Pour représenter une suite (u_n) , on place les points de coordonnées :

$$(n; u_n).$$

Pour une suite arithmétique, ces points sont **alignés**.

Attention

Une suite est définie seulement pour des indices entiers :

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

On représente donc des **points isolés** et non une droite continue.

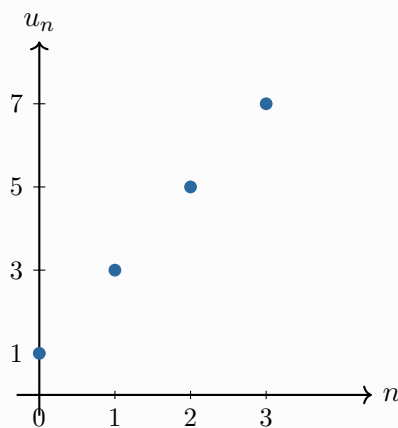
Exemple

On considère :

$$u_n = 2n + 1.$$

On obtient :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 3, \quad u_2 = 5, \quad u_3 = 7.$$



Les quatre points sont alignés.

2) Fonctions affines

A) Définition

Définition

Une fonction affine est une fonction de la forme :

$$f(x) = mx + p$$

où :

$$m = \text{coefficient directeur}$$

et :

$$p = \text{ordonnée à l'origine.}$$

Exemple

Soit :

$$f(x) = 3x - 5.$$

On reconnaît :

$$m = 3$$

et :

$$p = -5.$$

B) Représentation graphique

Propriété

La représentation graphique d'une fonction affine :

$$f(x) = mx + p$$

est une **droite**.

Elle coupe l'axe des ordonnées au point :

$$(0 ; p).$$

Exemple

Soit :

$$f(x) = x + 1.$$

On a :

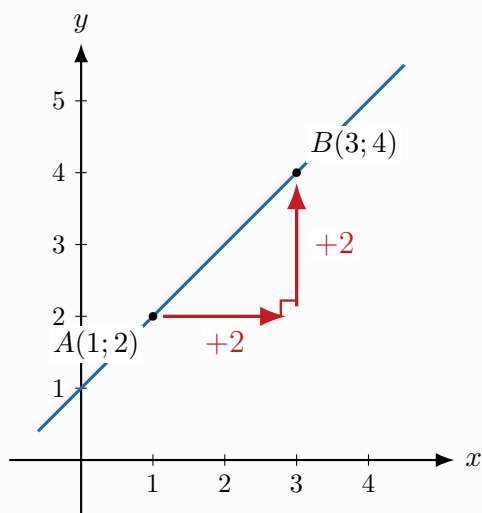
$$m = 1 \quad \text{et} \quad p = 1.$$

Prenons deux points de la droite :

$$A(1; 2) \quad \text{et} \quad B(3; 4).$$

Entre A et B :

- l'abscisse augmente de 2 ;
- l'ordonnée augmente de 2.



On retrouve alors le coefficient directeur :

$$m = \frac{\text{variation verticale}}{\text{variation horizontale}}.$$

Donc :

$$m = \frac{4 - 2}{3 - 1} = \frac{2}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{m = 1.}$$

C) Coefficient directeur

Propriété

Si une droite passe par :

$$A(x_A; y_A)$$

et :

$$B(x_B; y_B),$$

avec :

$$x_A \neq x_B,$$

alors son coefficient directeur vaut :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Remarque

Pour une fonction affine, le coefficient directeur est égal au taux d'accroissement :

$$m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}.$$

Exemple

Dans un repère, la droite représentant une fonction affine f passe par les points :

$$A(-2; 1) \quad \text{et} \quad B(2; 5).$$

Déterminons par le calcul l'expression de f .

1) Calcul du coefficient directeur

On utilise :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Donc :

$$m = \frac{5 - 1}{2 - (-2)}.$$

Ainsi :

$$m = \frac{4}{4} = 1.$$

Donc :

$$\boxed{m = 1.}$$

On sait maintenant que :

$$f(x) = x + p.$$

2) Calcul de l'ordonnée à l'origine

Le point $B(2; 5)$ appartient à la droite.

Ses coordonnées vérifient donc :

$$f(2) = 5.$$

Or :

$$f(2) = 2 + p.$$

Donc :

$$5 = 2 + p.$$

Ainsi :

$$p = 5 - 2.$$

Donc :

$$\boxed{p = 3.}$$

Finalement :

$$\boxed{f(x) = x + 3.}$$

Méthode

Pour déterminer l'expression d'une fonction affine à partir de deux points :

$$A(x_A; y_A) \quad \text{et} \quad B(x_B; y_B),$$

on procède en deux étapes.

1- On calcule le coefficient directeur :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

2- On écrit :

$$f(x) = mx + p$$

puis on utilise les coordonnées de l'un des deux points pour trouver p .

D) Sens de variation

Propriété

Pour une fonction affine :

$$f(x) = mx + p,$$

le sens de variation dépend du signe de m .

$$m > 0 \implies f \text{ strictement croissante}$$

$$m < 0 \implies f \text{ strictement décroissante}$$

$$m = 0 \implies f \text{ constante}$$

Exemple

Soit :

$$f(x) = -4x + 7.$$

On a :

$$m = -4.$$

Comme :

$$-4 < 0,$$

la fonction est :

$$\text{strictement décroissante.}$$

3) Lien entre suite arithmétique et fonction affine

Propriété

Pour une suite arithmétique :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Pour une fonction affine :

$$f(x) = mx + p.$$

Les deux expressions ont la même structure.

On peut faire correspondre :

$$r \longleftrightarrow m$$

et :

$$u_0 \longleftrightarrow p.$$

Remarque

La raison r indique l'évolution de la suite lorsque l'indice augmente de 1.

Le coefficient directeur m indique l'évolution de la fonction lorsque x augmente de 1.

Exemple

On considère :

$$u_n = 1500 + 80n.$$

La raison de la suite est :

$$r = 80.$$

On associe la fonction :

$$f(x) = 80x + 1500.$$

Son coefficient directeur est :

$$m = 80.$$

Dans les deux cas, la grandeur augmente de 80 lorsque l'on avance d'une unité.

4) Exercice type

Exercice type – Énoncé

Une personne place :

2000 €

sur un compte à intérêts simples.

Chaque année, son capital augmente de :

60 €.

On note u_n le capital après n années.

- 1) Donner u_0 .
- 2) Justifier que (u_n) est une suite arithmétique et donner sa raison.
- 3) Écrire la relation de récurrence.
- 4) Exprimer u_n en fonction de n .
- 5) Calculer u_{12} .
- 6) Donner le sens de variation de (u_n) .
- 7) On considère maintenant :

$$f(x) = 60x + 2000.$$

Identifier m et p .

- 8) Donner le sens de variation de f .
- 9) Expliquer le lien entre r et m .

Exercice type – Correction

1) Premier terme

Au départ :

$$u_0 = 2000.$$

2) Nature de la suite

Chaque année, on ajoute :

$$60.$$

La suite est donc arithmétique de raison :

$$r = 60.$$

3) Relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + 60.$$

4) Expression de u_n

On utilise :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Donc :

$$u_n = 2000 + 60n.$$

5) Capital après 12 années

$$u_{12} = 2000 + 60 \times 12.$$

Donc :

$$u_{12} = 2720.$$

Ainsi :

$$u_{12} = 2720 \text{ €}.$$

Exercice type – Correction (suite)

6) Sens de variation

$$r = 60 > 0.$$

Donc :

(u_n) est strictement croissante.

7) Fonction affine

$$f(x) = 60x + 2000.$$

On identifie :

$$m = 60$$

et :

$$p = 2000.$$

8) Sens de variation

Comme :

$$m = 60 > 0,$$

f est :

strictement croissante.

9) Lien

$$r = 60 \quad \text{et} \quad m = 60.$$

Donc :

$$r = m.$$

5) Formules à retenir

Suite arithmétique

Relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Raison :

$$r = u_{n+1} - u_n$$

Terme général :

$$u_n = u_0 + nr$$

Plus généralement :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Premier et dernier terme

$$\begin{aligned} \text{dernier terme} &= \text{premier terme} \\ &+ (\text{nombre de termes} - 1)r \end{aligned}$$

Variations de la suite

$$r > 0 \Rightarrow \text{croissante}$$

$$r < 0 \Rightarrow \text{décroissante}$$

$$r = 0 \Rightarrow \text{constante}$$

Fonction affine

$$f(x) = mx + p$$

$$m = \text{coefficient directeur}$$

$$p = \text{ordonnée à l'origine}$$

Coefficient directeur

Avec :

$$A(x_A; y_A) \quad B(x_B; y_B),$$

on a :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

avec :

$$x_A \neq x_B.$$

Taux d'accroissement

$$\frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = m$$

Variations de la fonction

$$m > 0 \Rightarrow f \text{ croissante}$$

$$m < 0 \Rightarrow f \text{ décroissante}$$

$$m = 0 \Rightarrow f \text{ constante}$$

Lien suite / fonction affine

$$u_n = u_0 + nr$$

et :

$$f(x) = mx + p.$$

Donc :

$$r \longleftrightarrow m$$

et :

$$u_0 \longleftrightarrow p$$