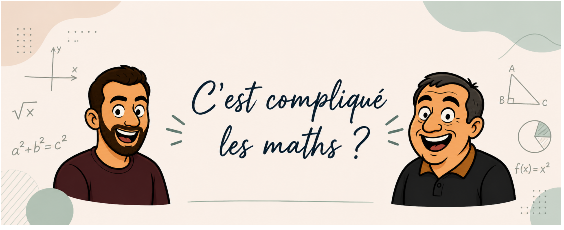

Chapitre : Puissance d'un nombre

I) Puissances d'exposant positif

Définition

Soient a un nombre et n un entier positif.
La puissance n-ième de a, notée a^n, est le produit de n facteurs tous égaux à a.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Exemples

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

$$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$$

Remarque : Attention

Il ne faut pas confondre $(-3)^4$ et -3^4.

$$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$$

$$-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$$

Les parenthèses changent le résultat.

Cas particuliers

Pour tout nombre a, on a :

$$a^1 = a$$

Si $a \neq 0$, alors :

$$a^0 = 1$$

Si $n \geq 1$, alors :

$$0^n = 0$$

Exemples

$$7^1 = 7 \qquad 12^0 = 1 \qquad 0^5 = 0$$

Propriété

On note 10^n le produit de n facteurs tous égaux à 10, avec $n \geq 1$.

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ facteurs}}$$

Le nombre 10^n s'écrit avec un 1 suivi de n zéros.

Exemples

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$

$$10^6 = 1\,000\,000$$

$$10^2 = 100$$

Point calculatrice

Pour calculer une puissance à la calculatrice, on utilise généralement la touche :

$$x^y \qquad \text{ou} \qquad \wedge$$

Par exemple, pour calculer 5^3, on peut taper :

$$5 \quad x^y \quad 3$$

On obtient :

$$5^3 = 125$$

II) Puissances d'exposant négatif

Définition

Soit $a \neq 0$.
On dit que :

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

est l'inverse de a.
De manière générale, si n est un entier supérieur ou égal à 1, alors :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemples

$$4^{-1} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$$

Propriété

On note 10^{-n} l'inverse de 10^n, avec $n \geq 1$.

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

Le nombre 10^{-n} s'écrit avec n décimales.

Exemples

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

$$10^{-6} = \frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000001$$

III) Calculer des puissances

Règles de calcul

Soient n et p deux entiers.

Situation	Règle	Exemple
Produit	$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$	$10^2 \times 10^5 = 10^7$
Quotient	$\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$	$\frac{10^8}{10^3} = 10^5$
Puissance de puissance	$(10^n)^p = 10^{n \times p}$	$(10^4)^2 = 10^8$

Exemples

$$10^6 \times 10^{-2} = 10^{6+(-2)} = 10^4$$

$$\frac{10^3}{10^7} = 10^{3-7} = 10^{-4}$$

$$(10^{-2})^3 = 10^{-2\times 3} = 10^{-6}$$

IV) Notation scientifique d'un nombre

Définition

L'écriture scientifique d'un nombre décimal non nul est la seule écriture sous la forme :

$$a \times 10^n$$

où a est un nombre décimal qui a un seul chiffre non nul avant la virgule, et où n est un entier relatif.
Autrement dit :

$$1 \leq a < 10$$

Exemples

Mettre 72 000 en écriture scientifique.

$$72\,000 = 7{,}2 \times 10\,000$$

$$72\,000 = 7{,}2 \times 10^4$$

Mettre 0,0048 en écriture scientifique.

$$0{,}0048 = 4{,}8 \times 0{,}001$$

$$0{,}0048 = 4{,}8 \times 10^{-3}$$

Exemples avec des unités

La longueur d'un terrain est environ :

$$125\,000 \text{ cm}$$

En écriture scientifique :

$$125\,000 = 1{,}25 \times 10^5$$

Donc :

$$125\,000 \text{ cm} = 1{,}25 \times 10^5 \text{ cm}$$

L'épaisseur d'une feuille est environ :

$$0{,}009 \text{ cm}$$

En écriture scientifique :

$$0{,}009 = 9 \times 10^{-3}$$

Donc :

$$0{,}009 \text{ cm} = 9 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

Comparer des grands nombres

On souhaite comparer deux distances.

$$\text{Distance Paris – New York : } 5{,}84 \times 10^3 \text{ km}$$

$$\text{Distance Paris – Tokyo : } 9710 \text{ km}$$

On écrit les deux distances sous forme scientifique :

$$5{,}84 \times 10^3 \text{ km}$$

et

$$9710 = 9{,}71 \times 10^3$$

On compare :

$$5{,}84 \times 10^3 < 9{,}71 \times 10^3$$

Donc la distance Paris – Tokyo est plus grande que la distance Paris – New York.

Autre exemple

On compare les masses suivantes :

$$\text{masse d'un camion : } 3{,}2 \times 10^3 \text{ kg}$$

$$\text{masse d'un avion léger : } 12{,}5 \times 10^2 \text{ kg}$$

On transforme la deuxième écriture :

$$12{,}5 \times 10^2 = 1{,}25 \times 10^3$$

On compare :

$$3{,}2 \times 10^3 > 1{,}25 \times 10^3$$

Donc le camion est plus lourd que l'avion léger.

V) Les préfixes et les puissances de 10

Propriété

Certains préfixes permettent d'exprimer des grandeurs très grandes ou très petites à l'aide de puissances de 10.

Préfixe	Symbole	Puissance de 10	Nombre
kilo	k	10^3	1 000
méga	M	10^6	1 000 000
giga	G	10^9	1 000 000 000
déci	d	10^{-1}	0,1
centi	c	10^{-2}	0,01
milli	m	10^{-3}	0,001
micro	μ	10^{-6}	0,000001
nano	n	10^{-9}	0,000000001

Exemple 1 : capacités de stockage

Donner l'écriture décimale puis l'écriture scientifique des capacités suivantes.

Objet	Capacité	Écriture scientifique
Carte mémoire	32 Go	$3{,}2 \times 10^{10}$ octets
Clé USB	64 Go	$6{,}4 \times 10^{10}$ octets
Disque dur	2 To	2×10^{12} octets

On utilise :

$$1 \text{ Go} = 10^9 \text{ octets} \qquad 1 \text{ To} = 10^{12} \text{ octets}$$

Exemple 2 : dimensions très petites

Donner l'écriture en mètre puis l'écriture scientifique.

Objet	Taille	Écriture scientifique en mètre
Grain de sable	0,5 mm	5×10^{-4} m
Cheveu	70 μm	7×10^{-5} m
Bactérie	2 μm	2×10^{-6} m
Molécule	3 nm	3×10^{-9} m

On utilise :

$$1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \qquad 1\ \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m} \qquad 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$$