



Correction – Équations du second degré

1^{re} spécialité

1. Trinômes et paraboles

Exercice 1 – Identifier les coefficients

On écrit chaque trinôme sous la forme $ax^2 + bx + c$.

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$:

$$a = 3, \quad b = -5, \quad c = 2$$

b) $g(x) = -2x^2 + 7x - 4$:

$$a = -2, \quad b = 7, \quad c = -4$$

c) $h(x) = 5x^2 - 9 = 5x^2 + 0x - 9$:

$$a = 5, \quad b = 0, \quad c = -9$$

d) $p(x) = -x^2 + 6x = -x^2 + 6x + 0$:

$$a = -1, \quad b = 6, \quad c = 0$$

e) $q(x) = 4 - 3x + 2x^2 = 2x^2 - 3x + 4$:

$$a = 2, \quad b = -3, \quad c = 4$$

f) $r(x) = 7x - 4x^2 + 1 = -4x^2 + 7x + 1$:

$$a = -4, \quad b = 7, \quad c = 1$$

Exercice 2 – Développer avant d'identifier

a)

$$f(x) = (x + 3)^2 - 5 = x^2 + 6x + 9 - 5 = x^2 + 6x + 4.$$

Donc

$$a = 1, \quad b = 6, \quad c = 4$$

b)

$$g(x) = 2(x-1)^2 + 4 = 2(x^2 - 2x + 1) + 4 = 2x^2 - 4x + 6.$$

Donc

$$\boxed{a = 2, \quad b = -4, \quad c = 6}$$

c)

$$h(x) = -3(x+2)^2 + 7 = -3(x^2 + 4x + 4) + 7 = -3x^2 - 12x - 5.$$

Donc

$$\boxed{a = -3, \quad b = -12, \quad c = -5}$$

d)

$$p(x) = (2x-1)(x+3) = 2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 + 5x - 3.$$

Donc

$$\boxed{a = 2, \quad b = 5, \quad c = -3}$$

Exercice 3 – Sens d'ouverture

Le sens d'ouverture dépend du signe de a .

- $f(x) = 4x^2 - 3x + 1 : a = 4 > 0$, donc la parabole est **tournée vers le haut**.
- $g(x) = -2x^2 + 5 : a = -2 < 0$, donc la parabole est **tournée vers le bas**.
- $h(x) = -x^2 - 6x + 2 : a = -1 < 0$, donc la parabole est **tournée vers le bas**.
- $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 7 : a = \frac{1}{2} > 0$, donc la parabole est **tournée vers le haut**.

Exercice 4 – Sommet d'une parabole

On utilise

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = f(\alpha).$$

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5.$

$$\alpha = -\frac{-6}{2 \times 1} = 3$$

et

$$\beta = f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 5 = -4.$$

Ainsi,

$$\boxed{S(3; -4)}$$

b) $g(x) = 2x^2 + 8x + 3.$

$$\alpha = -\frac{8}{2 \times 2} = -2$$

et

$$\beta = g(-2) = 2(-2)^2 + 8(-2) + 3 = -5.$$

Ainsi,

$$\boxed{S(-2; -5)}$$

c) $h(x) = -x^2 + 4x + 1.$

$$\alpha = -\frac{4}{2(-1)} = 2$$

et

$$\beta = h(2) = -4 + 8 + 1 = 5.$$

Ainsi,

$$\boxed{S(2; 5)}$$

d) $p(x) = -2x^2 - 12x - 7$.

$$\alpha = -\frac{-12}{2(-2)} = -3$$

et

$$\beta = p(-3) = -2 \times 9 + 36 - 7 = 11.$$

Ainsi,

$$\boxed{S(-3; 11)}$$

2. Forme canonique et extremum

Exercice 5 – Lire une forme canonique

a)

$$f(x) = 3(x - 2)^2 - 5.$$

Ainsi $\alpha = 2$, $\beta = -5$ et $a = 3 > 0$.

$$\boxed{S(2; -5)}$$

f admet un minimum égal à -5 , atteint pour $x = 2$.

b)

$$g(x) = -2(x + 4)^2 + 7 = -2(x - (-4))^2 + 7.$$

Ainsi $\alpha = -4$, $\beta = 7$ et $a = -2 < 0$.

$$\boxed{S(-4; 7)}$$

g admet un maximum égal à 7 , atteint pour $x = -4$.

c)

$$h(x) = 5(x - 1)^2 + 3.$$

Ainsi

$$\boxed{S(1; 3)}$$

et h admet un minimum égal à 3 , atteint pour $x = 1$.

d)

$$p(x) = -(x + 3)^2 - 6 = -(x - (-3))^2 - 6.$$

Ainsi

$$\boxed{S(-3; -6)}$$

et p admet un maximum égal à -6 , atteint pour $x = -3$.

Exercice 6 – Déterminer la forme canonique

a) $f(x) = x^2 - 8x + 11$.

$$\alpha = 4, \quad \beta = f(4) = 16 - 32 + 11 = -5.$$

Donc

$$\boxed{f(x) = (x - 4)^2 - 5}$$

b) $g(x) = 2x^2 + 12x + 7$.

$$\alpha = -\frac{12}{4} = -3, \quad \beta = g(-3) = 18 - 36 + 7 = -11.$$

Donc

$$g(x) = 2(x + 3)^2 - 11$$

c) $h(x) = -x^2 + 6x - 4$.

$$\alpha = -\frac{6}{-2} = 3, \quad \beta = h(3) = -9 + 18 - 4 = 5.$$

Donc

$$h(x) = -(x - 3)^2 + 5$$

d) $p(x) = -2x^2 - 8x + 1$.

$$\alpha = -\frac{-8}{-4} = -2, \quad \beta = p(-2) = -8 + 16 + 1 = 9.$$

Donc

$$p(x) = -2(x + 2)^2 + 9$$

Exercice 7 – Vérifier une forme canonique

$$3(x - 2)^2 - 5 = 3(x^2 - 4x + 4) - 5 = 3x^2 - 12x + 12 - 5 = 3x^2 - 12x + 7.$$

Donc

$$f(x) = 3(x - 2)^2 - 5$$

Comme $3 > 0$ et $(x - 2)^2 \geq 0$,

$$f(x) \geq -5.$$

Ainsi,

$$\min f = -5 \text{ atteint pour } x = 2$$

Exercice 8 – Déterminer un maximum

Pour

$$g(x) = -2x^2 + 16x - 25,$$

on a

$$\alpha = -\frac{16}{2(-2)} = 4.$$

Puis

$$\beta = g(4) = -2 \times 16 + 64 - 25 = 7.$$

Donc

$$g(x) = -2(x - 4)^2 + 7$$

Comme $-2 < 0$, g admet un maximum :

$$\max g = 7 \text{ atteint pour } x = 4$$

3. Discriminant et équations

Exercice 9 – Calculer un discriminant

a) $x^2 - 5x + 6 :$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0.$$

Deux racines réelles distinctes.

b) $x^2 + 4x + 4 :$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0.$$

Une racine réelle double.

c) $2x^2 + x + 3 :$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 3 = -23 < 0.$$

Aucune racine réelle.

d) $3x^2 - 10x + 3 :$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 64 > 0.$$

Deux racines réelles distinctes.

e) $-x^2 + 2x + 8 :$

$$\Delta = 2^2 - 4(-1)(8) = 36 > 0.$$

Deux racines réelles distinctes.

f) $4x^2 - 4x + 1 :$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 0.$$

Une racine réelle double.

Exercice 10 – Deux solutions réelles

a) $x^2 - 7x + 10 = 0.$

$$\Delta = 49 - 40 = 9.$$

$$x_1 = \frac{7-3}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{7+3}{2} = 5.$$

$$S = \{2; 5\}$$

b) $x^2 + x - 6 = 0.$

$$\Delta = 1 + 24 = 25.$$

$$x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2.$$

$$S = \{-3; 2\}$$

c) $2x^2 - 5x + 2 = 0.$

$$\Delta = 25 - 16 = 9.$$

$$x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{5+3}{4} = 2.$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2}; 2 \right\}$$

d) $3x^2 + x - 2 = 0$.

$$\Delta = 1 + 24 = 25.$$

$$x_1 = \frac{-1-5}{6} = -1, \quad x_2 = \frac{-1+5}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$S = \left\{ -1; \frac{2}{3} \right\}$$

Exercice 11 – Racine double

a)

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0, \quad x_0 = \frac{6}{2} = 3.$$

$$S = \{3\}$$

b)

$$\Delta = 12^2 - 4 \times 4 \times 9 = 0, \quad x_0 = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}.$$

$$S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

c)

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 9 \times 4 = 0, \quad x_0 = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

$$S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

d)

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 25 \times 1 = 0, \quad x_0 = \frac{-10}{50} = -\frac{1}{5}.$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{5} \right\}$$

Exercice 12 – Aucune solution réelle

a)

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0.$$

b)

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 7 = -40 < 0.$$

c)

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times 2 = -23 < 0.$$

Dans les trois cas,

$$S = \emptyset$$

Exercice 13 – Solutions exactes

a)

$$\Delta = 16 - 4 = 12.$$

Donc

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

$$S = \{2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\}$$

b)

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 17.$$

$$S = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}; \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right\}$$

c)

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 28.$$

Comme $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$,

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

$$S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{7}}{3}; \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \right\}$$

d)

$$\Delta = 36 - 8 = 28.$$

$$x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -3 \pm \sqrt{7}.$$

$$S = \{-3 - \sqrt{7}; -3 + \sqrt{7}\}$$

Exercice 14 – Se ramener à une équation du second degré

a)

$$x^2 + 3x = 10 \iff x^2 + 3x - 10 = 0.$$

$$\Delta = 9 + 40 = 49.$$

$$S = \{-5; 2\}$$

b)

$$2x^2 + 7 = 9x \iff 2x^2 - 9x + 7 = 0.$$

$$\Delta = 81 - 56 = 25.$$

$$x_1 = \frac{9 - 5}{4} = 1, \quad x_2 = \frac{9 + 5}{4} = \frac{7}{2}.$$

$$S = \left\{ 1; \frac{7}{2} \right\}$$

c)

$$3x(x-2) = x+4 \iff 3x^2 - 7x - 4 = 0.$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 97.$$

$$S = \left\{ \frac{7 - \sqrt{97}}{6}; \frac{7 + \sqrt{97}}{6} \right\}$$

d)

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= 3x+7 \\ \iff x^2 + 2x + 1 &= 3x+7 \\ \iff x^2 - x - 6 &= 0.\end{aligned}$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25.$$

$$S = \{-2; 3\}$$

4. Somme et produit des racines

Exercice 15 – Une racine est connue

On utilise

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

a) $x_1 = 1$ et

$$x_1 x_2 = 4.$$

Donc

$$x_2 = 4$$

b) $x_1 = 3$ et

$$x_1 x_2 = \frac{3}{2}.$$

Donc

$$3x_2 = \frac{3}{2} \implies x_2 = \frac{1}{2}$$

c) $x_1 = -1$ et

$$x_1 x_2 = -\frac{2}{3}.$$

Donc

$$-x_2 = -\frac{2}{3} \implies x_2 = \frac{2}{3}$$

d) $x_1 = -3$ et

$$x_1 x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Donc

$$-3x_2 = -\frac{3}{2} \implies x_2 = \frac{1}{2}$$

Exercice 16 – Somme et produit

On utilise

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

a) $2x^2 - 9x + 4 = 0$:

$$x_1 + x_2 = \frac{9}{2}, \quad x_1 x_2 = 2$$

b) $3x^2 + 7x - 5 = 0$:

$$x_1 + x_2 = -\frac{7}{3}, \quad x_1 x_2 = -\frac{5}{3}$$

c) $-2x^2 + 5x + 6 = 0$:

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{2}, \quad x_1 x_2 = -3$$

d) $5x^2 - 3x - 8 = 0$:

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{5}, \quad x_1 x_2 = -\frac{8}{5}$$

Exercice 17 – Retrouver deux nombres

Deux nombres de somme S et de produit P sont solutions de

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

a)

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Les deux nombres sont

$$\boxed{2 \text{ et } 5}$$

b)

$$x^2 - 10x + 21 = 0.$$

Les deux nombres sont

$$\boxed{3 \text{ et } 7}$$

c)

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

$$\Delta = 12.$$

Les deux nombres sont

$$\boxed{2 - \sqrt{3} \text{ et } 2 + \sqrt{3}}$$

d)

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Les deux nombres sont

$$\boxed{-4 \text{ et } 1}$$

5. Problèmes

Exercice 18 – Aire d'un rectangle

La longueur vaut $x + 4$ et la largeur x .

$$A(x) = x(x + 4) = x^2 + 4x.$$

On cherche $A(x) = 32$:

$$\begin{aligned}x^2 + 4x &= 32 \\x^2 + 4x - 32 &= 0.\end{aligned}$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-32) = 144.$$

$$x_1 = \frac{-4 - 12}{2} = -8, \quad x_2 = \frac{-4 + 12}{2} = 4.$$

Une longueur ne peut pas être négative, donc $x = -8$ est impossible.

Ainsi,

$$\boxed{x = 4}$$

La largeur vaut 4 m et la longueur vaut

$$4 + 4 = 8 \text{ m.}$$

$$\boxed{\text{Dimensions : } 4 \text{ m} \times 8 \text{ m}}$$

Exercice 19 – Trajectoire d'un objet

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1.$$

Comme $a = -5 < 0$, la parabole est tournée vers le bas.

$$\alpha = -\frac{20}{2(-5)} = 2.$$

$$\beta = h(2) = -5 \times 4 + 40 + 1 = 21.$$

Donc

$$\boxed{h(t) = -5(t - 2)^2 + 21}$$

La hauteur maximale est donc

$$\boxed{21 \text{ m}}$$

et elle est atteinte pour

$$\boxed{t = 2 \text{ s}}.$$

Réolvons $h(t) = 1$:

$$\begin{aligned}-5t^2 + 20t + 1 &= 1 \\-5t^2 + 20t &= 0 \\-5t(t - 4) &= 0.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{t = 0 \text{ ou } t = 4}$$

L'objet se trouve à 1 m de hauteur au départ, puis à nouveau 4 secondes plus tard.

Exercice 20 – Optimisation d'un bénéfice

$$B(x) = -2x^2 + 24x - 40.$$

$$\alpha = -\frac{24}{2(-2)} = 6.$$

$$\beta = B(6) = -2 \times 36 + 144 - 40 = 32.$$

Ainsi,

$$B(x) = -2(x - 6)^2 + 32$$

Le bénéfice maximal est donc de

$$32\,000 \text{ euros}$$

pour

$$x = 6,$$

c'est-à-dire pour une production de

$$600 \text{ objets}.$$

Réolvons $B(x) = 0$:

$$-2x^2 + 24x - 40 = 0.$$

En divisant par -2 :

$$x^2 - 12x + 20 = 0.$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 20 = 64.$$

$$x_1 = \frac{12 - 8}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{12 + 8}{2} = 10.$$

Ainsi,

$$x = 2 \text{ ou } x = 10.$$

Le bénéfice est nul pour une production de

$$200 \text{ ou } 1000 \text{ objets}.$$

Correction – Préparer le bac

Exercice 21 – Type bac

On considère

$$B(x) = -x^2 + 8x - 7.$$

1) Développons :

$$-(x-4)^2 + 9 = -(x^2 - 8x + 16) + 9 = -x^2 + 8x - 7.$$

Donc

$$B(x) = -(x-4)^2 + 9.$$

2) Comme

$$-(x-4)^2 \leq 0,$$

on a

$$B(x) \leq 9.$$

Le bénéfice maximal est donc

$$9\,000 \text{ euros}$$

et il est atteint pour $x = 4$, soit

$$400 \text{ articles}.$$

3) Résolvons

$$-x^2 + 8x - 7 = 0.$$

On peut écrire

$$x^2 - 8x + 7 = 0.$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 36.$$

$$x_1 = \frac{8-6}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{8+6}{2} = 7.$$

$$S = \{1; 7\}$$

4) Le bénéfice est nul pour une production de

$$100 \text{ ou } 700 \text{ articles}.$$

5) Un bénéfice de 8 000 euros correspond à

$$B(x) = 8.$$

Donc

$$-x^2 + 8x - 7 = 8$$

$$-x^2 + 8x - 15 = 0$$

et donc

$$x^2 - 8x + 15 = 0.$$

6)

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 15 = 4.$$

$$x_1 = \frac{8-2}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{8+2}{2} = 5.$$

$$S = \{3; 5\}$$

7) L'entreprise obtient donc un bénéfice de 8 000 euros pour

$$300 \text{ ou } 500 \text{ articles}.$$

Exercice 22 – Type bac

On considère

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 10.$$

1)

$$a = 2, \quad b = -12, \quad c = 10$$

2)

$$\alpha = -\frac{-12}{2 \times 2} = 3.$$

Puis

$$\beta = f(3) = 2 \times 9 - 12 \times 3 + 10 = 18 - 36 + 10 = -8.$$

Donc

$$\alpha = 3, \quad \beta = -8.$$

3) La forme canonique est

$$f(x) = 2(x - 3)^2 - 8.$$

On peut vérifier :

$$2(x - 3)^2 - 8 = 2(x^2 - 6x + 9) - 8 = 2x^2 - 12x + 10.$$

4) Le sommet de la parabole est

$$S(3; -8).$$

5) Comme $2 > 0$, la parabole est tournée vers le haut.

f possède donc un minimum égal à

$$-8$$

atteint pour

$$x = 3.$$

6) Résolvons

$$2x^2 - 12x + 10 = 0.$$

On peut diviser par 2 :

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16.$$

$$x_1 = \frac{6 - 4}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{6 + 4}{2} = 5.$$

Ainsi,

$$S = \{1; 5\}.$$

7) Graphiquement, 1 et 5 sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

8) D'après les relations entre les racines :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-12}{2} = 6,$$

et

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{10}{2} = 5.$$

Ainsi,

$$\boxed{x_1 + x_2 = 6, \quad x_1 x_2 = 5}.$$

9) Avec $x_1 = 1$ et $x_2 = 5$:

$$1 + 5 = 6$$

et

$$1 \times 5 = 5.$$

Les résultats sont bien vérifiés.

10) Les deux nombres dont la somme vaut 6 et le produit vaut 5 sont donc

$$\boxed{1 \text{ et } 5}.$$

Cours, exercices, automatismes et sujets de révision
cestcompliquelismaths.fr