



Cours : Modélisation quadratique

Objectifs du chapitre

À la fin de ce chapitre, il faut savoir :

- reconnaître une fonction polynôme du second degré ;
- associer une parabole à une expression de la forme ax^2 , $ax^2 + c$ ou $a(x - x_1)(x - x_2)$;
- reconnaître le sens d'ouverture d'une parabole ;
- lire ou déterminer son axe de symétrie et son sommet ;
- déterminer ses variations ;
- déterminer les racines d'une expression donnée sous forme factorisée ;
- étudier le signe d'un polynôme donné sous forme factorisée.

1) Reconnaître une fonction polynôme du second degré

Définition

Une fonction f est une **fonction polynôme du second degré** lorsqu'elle peut s'écrire :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec a , b et c des nombres réels et :

$$a \neq 0.$$

Cette écriture est appelée la **forme développée et réduite**.

Attention

Le coefficient de x^2 ne doit pas être nul.

Si $a = 0$, le terme en x^2 disparaît et la fonction n'est plus du second degré.

Méthode

Pour reconnaître une fonction du second degré :

- 1- développer et réduire si nécessaire ;
- 2- obtenir une expression de la forme :

$$ax^2 + bx + c;$$

- 3- vérifier que :

$$a \neq 0.$$

Exemple

On considère :

$$f(x) = (x + 2)(x - 3).$$

On développe :

$$f(x) = x^2 - 3x + 2x - 6.$$

Donc :

$$f(x) = x^2 - x - 6.$$

On identifie :

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = -6.$$

Comme :

$$a = 1 \neq 0,$$

f est une fonction polynôme du second degré.

En revanche :

$$g(x) = 5x - 2$$

n'est pas une fonction polynôme du second degré.

2) Paraboles de la forme $f(x) = ax^2$

Propriété

La représentation graphique de :

$$f(x) = ax^2$$

est une parabole dont le sommet est :

$$O(0; 0).$$

Son axe de symétrie est l'axe des ordonnées :

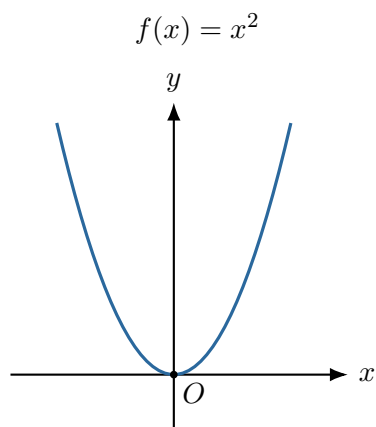
$$x = 0.$$

Propriété

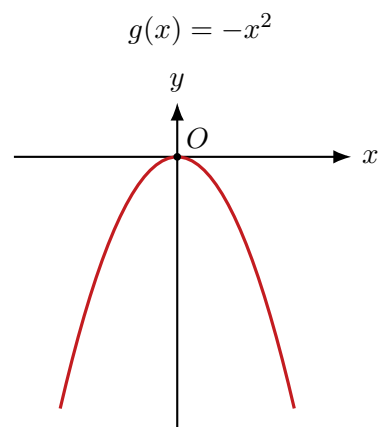
Le signe de a détermine le sens d'ouverture :

$$a > 0 \implies \text{ouverte vers le haut}$$

$$a < 0 \implies \text{ouverte vers le bas.}$$



$$a = 1 > 0$$



$$a = -1 < 0$$

3) Paraboles de la forme $f(x) = ax^2 + c$

Propriété

Pour :

$$f(x) = ax^2 + c,$$

le sommet est :

$$S(0; c).$$

L'axe de symétrie reste :

$$x = 0.$$

Remarque

Le nombre c déplace la parabole verticalement.

De plus :

$$f(0) = c.$$

Ainsi, la parabole coupe l'axe des ordonnées au niveau de c .

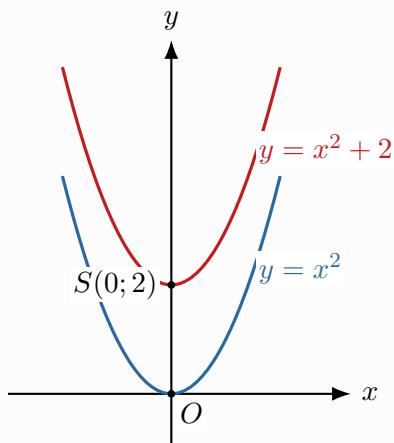
Exemple

Comparons :

$$f(x) = x^2$$

et :

$$g(x) = x^2 + 2.$$



La deuxième parabole a la même allure mais son sommet est remonté de 2 unités.

4) Parabole et forme factorisée

Définition

Une expression du second degré peut être donnée sous la forme :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Cette écriture est appelée une **forme factorisée**.

Propriété

Dans :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

les nombres x_1 et x_2 sont des racines de la fonction car :

$$f(x_1) = 0$$

et :

$$f(x_2) = 0.$$

Graphiquement, la parabole rencontre donc l'axe des abscisses aux abscisses :

$$x_1 \text{ et } x_2.$$

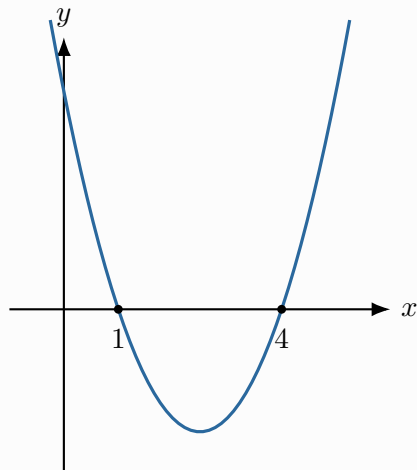
Exemple

On considère :

$$f(x) = (x - 1)(x - 4).$$

Les racines sont immédiatement visibles :

$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = 4.$$



5) Axe de symétrie et sommet

Définition

Une parabole possède un unique **axe de symétrie vertical**.

Le point de la parabole situé sur cet axe est appelé le **sommet**.

Si le sommet est :

$$S(\alpha; \beta),$$

alors l'axe de symétrie a pour équation :

$$x = \alpha.$$

Méthode

Pour lire les caractéristiques d'une parabole sur un graphique :

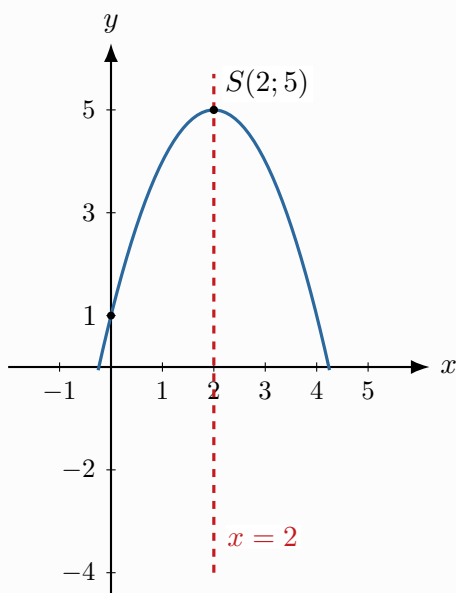
- 1- observer son sens d'ouverture ;
- 2- repérer son point le plus haut ou le plus bas ;
- 3- lire les coordonnées du sommet :

$$S(\alpha; \beta);$$

- 4- en déduire l'axe de symétrie :

$$x = \alpha.$$

Exemple



La parabole est ouverte vers le bas.
Son sommet est :

$$S(2; 5).$$

Son axe de symétrie est :

$$x = 2.$$

6) Déterminer l'axe de symétrie par le calcul

Propriété

Deux points d'une parabole ayant la même ordonnée sont symétriques par rapport à son axe.
Si :

$$f(x_1) = f(x_2)$$

avec :

$$x_1 \neq x_2,$$

alors :

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Remarque

On peut notamment utiliser :

$$f(0) = c$$

puis rechercher une autre valeur de x ayant également pour image c .

Méthode

Pour déterminer l'axe :

1- identifier :

$$c = f(0);$$

2- résoudre :

$$f(x) = c;$$

3- obtenir deux abscisses ayant la même image ;

4- calculer leur milieu.

Exemple

On considère :

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

On a :

$$c = 3.$$

On résout :

$$f(x) = 3.$$

Donc :

$$x^2 - 4x + 3 = 3.$$

Ainsi :

$$x^2 - 4x = 0.$$

On factorise :

$$x(x - 4) = 0.$$

Les solutions sont :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 4.$$

L'axe est situé à mi-distance :

$$\alpha = \frac{0 + 4}{2} = 2.$$

Donc :

$$\boxed{x = 2.}$$

7) Déterminer le sommet

Propriété

Si l'axe de symétrie a pour équation :

$$x = \alpha,$$

alors :

$$\beta = f(\alpha).$$

Le sommet est donc :

$$S(\alpha; f(\alpha)).$$

Exemple

On reprend :

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

On a :

$$\alpha = 2.$$

Alors :

$$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1.$$

Donc :

$$S(2; -1).$$

8) Variations d'une fonction du second degré

Propriété

Soit :

$$S(\alpha; \beta)$$

le sommet.

Si :

$$a > 0,$$

la fonction est décroissante puis croissante.

Elle admet un **minimum** égal à β .

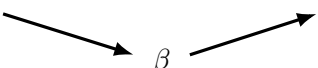
Si :

$$a < 0,$$

la fonction est croissante puis décroissante.

Elle admet un **maximum** égal à β .

Si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f			

minimum β

Si $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f			

maximum β

Méthode

Pour déterminer les variations :

- 1- identifier le signe de a ;
- 2- repérer ou déterminer le sommet :

$$S(\alpha; \beta);$$

- 3- choisir le tableau correspondant au signe de a ;
- 4- préciser le minimum ou le maximum.

Exemple

Pour :

$$f(x) = x^2 - 4x + 3,$$

on a :

$$S(2; -1)$$

et :

$$a = 1 > 0.$$

Donc f est décroissante sur :

$$]-\infty; 2]$$

puis croissante sur :

$$[2; +\infty[.$$

Elle admet un minimum égal à :

$$-1$$

atteint pour :

$$x = 2.$$

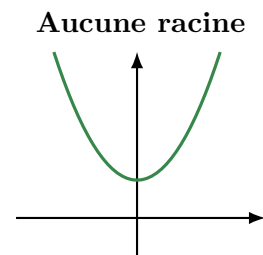
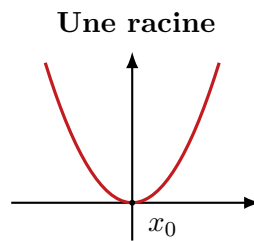
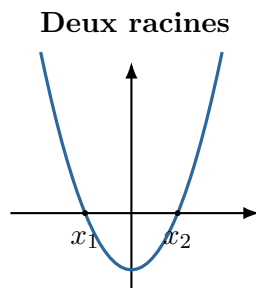
9) Racines d'une fonction

Définition

Un réel x_0 est une **racine** de f lorsque :

$$f(x_0) = 0.$$

Graphiquement, une racine est l'abscisse d'un point où la parabole rencontre l'axe des abscisses.



Méthode

Pour vérifier si un réel k est une racine :

1- calculer $f(k)$;

2- si :

$$f(k) = 0,$$

alors k est une racine ;

3- sinon, k n'est pas une racine.

Exemple

On considère :

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Pour $x = 2$:

$$f(2) = 4 - 10 + 6 = 0.$$

Donc :

2 est une racine.

Pour $x = 5$:

$$f(5) = 25 - 25 + 6 = 6.$$

Donc :

5 n'est pas une racine.

10) Déterminer les racines à partir d'une forme factorisée

Attention

Dans ce chapitre, on ne calcule pas les racines à l'aide du discriminant.
La forme factorisée est donnée ou directement exploitable.

Méthode

Si :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

on résout :

$$f(x) = 0.$$

On utilise la règle du produit nul :

$$AB = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Exemple

On considère :

$$f(x) = -3(x - 2)(x - 5).$$

On résout :

$$-3(x - 2)(x - 5) = 0.$$

Donc :

$$x - 2 = 0$$

ou :

$$x - 5 = 0.$$

Ainsi :

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 5.$$

11) Signe d'un polynôme donné sous forme factorisée

Propriété

On considère :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

avec :

$$x_1 < x_2.$$

Le signe de f dépend du signe de a .

A) Si $a > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Remarque

Lorsque $a > 0$:

- $f(x) > 0$ avant x_1 ;
- $f(x) < 0$ entre x_1 et x_2 ;
- $f(x) > 0$ après x_2 .

B) Si $a < 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Remarque

Lorsque $a < 0$:

- $f(x) < 0$ avant x_1 ;
- $f(x) > 0$ entre x_1 et x_2 ;
- $f(x) < 0$ après x_2 .

C) Cas d'une seule racine

Propriété

Si :

$$f(x) = a(x - x_0)^2,$$

alors x_0 est l'unique racine.

Le signe de f ne change pas lorsque l'on passe par x_0 .

Si $a > 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

Si $a < 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

Méthode

Pour dresser le tableau de signes d'un polynôme donné sous forme factorisée :

- 1- déterminer les racines ;
- 2- les ranger dans l'ordre croissant ;
- 3- repérer le signe de a ;
- 4- si $a > 0$, commencer par le signe + ;
- 5- si $a < 0$, commencer par le signe - ;
- 6- changer de signe après chacune des deux racines distinctes.

Exemple

On considère :

$$g(x) = -2(x - 1)(x + 3).$$

Les racines sont :

$$x = 1 \quad \text{et} \quad x = -3.$$

On les range :

$$-3 < 1.$$

Le coefficient situé devant les facteurs est :

$$a = -2 < 0.$$

On commence donc par un signe négatif.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ainsi :

$$g(x) > 0 \text{ sur }]-3; 1[$$

et :

$$g(x) < 0 \text{ sur }]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[.$$

12) Modélisation quadratique

Remarque

Les fonctions polynômes du second degré peuvent modéliser une grandeur qui ne varie pas toujours dans le même sens.

Elles peuvent notamment représenter :

- une trajectoire parabolique ;
- la forme d'une arche ou d'un pont ;
- un chiffre d'affaires en fonction d'un prix ;
- une population qui augmente puis diminue sur une période limitée.

Le sommet peut alors représenter une valeur maximale ou minimale dans la situation étudiée.

Exemple

Le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, est modélisé par une parabole ouverte vers le bas. Son sommet est :

$$S(4; 12).$$

Comme la parabole est ouverte vers le bas, la fonction admet un maximum. Le bénéfice maximal est :

$$12$$

pour :

$$x = 4.$$

13) Exercice type

Exercice type – Énoncé

On considère la fonction :

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

On sait également que :

$$f(x) = (x - 1)(x - 3).$$

- 1) Identifier a , b et c .
- 2) Donner le sens d'ouverture de la parabole.
- 3) Résoudre :

$$f(x) = 3$$

puis déterminer l'équation de l'axe de symétrie.

- 4) Déterminer les coordonnées du sommet.
- 5) Donner les variations de f .
- 6) À l'aide de la forme factorisée donnée, déterminer les racines de f .
- 7) Dresser le tableau de signes de f .

Exercice type – Correction

1) Coefficients

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Donc :

$$a = 1, \quad b = -4, \quad c = 3.$$

2) Sens d'ouverture

Comme :

$$a = 1 > 0,$$

la parabole est :

ouverte vers le haut.

3) Axe de symétrie

On résout :

$$f(x) = 3.$$

Donc :

$$x^2 - 4x + 3 = 3.$$

Ainsi :

$$x^2 - 4x = 0.$$

On factorise :

$$x(x - 4) = 0.$$

Les solutions sont :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 4.$$

L'axe est situé au milieu :

$$\alpha = \frac{0 + 4}{2} = 2.$$

Donc :

$$x = 2.$$

Exercice type – Correction

4) Sommet

$$f(2) = 4 - 8 + 3 = -1.$$

Donc :

$$S(2; -1).$$

5) Variations

Comme :

$$a > 0,$$

f est décroissante sur :

$$]-\infty; 2]$$

puis croissante sur :

$$[2; +\infty[.$$

Elle admet un minimum égal à :

$$-1.$$

6) Racines

On utilise la forme factorisée donnée :

$$f(x) = (x - 1)(x - 3).$$

On résout :

$$(x - 1)(x - 3) = 0.$$

Donc :

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 3.$$

Exercice type – Correction

7) Tableau de signes

Les racines sont :

$$1 < 3.$$

De plus :

$$a = 1 > 0.$$

Le tableau de signes est donc :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	0	+

14) Formules à retenir

Second degré

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec :

$$a \neq 0.$$

Et :

$$f(0) = c.$$

Forme ax^2

$$f(x) = ax^2$$

Sommet :

$$O(0; 0)$$

Axe :

$$x = 0$$

Forme $ax^2 + c$

$$f(x) = ax^2 + c$$

Sommet :

$$S(0; c)$$

Axe :

$$x = 0$$

Ouverture

$$a > 0 \Rightarrow \text{vers le haut}$$

$$a < 0 \Rightarrow \text{vers le bas}$$

Sommet

Si :

$$S(\alpha; \beta),$$

alors :

$$x = \alpha$$

est l'axe de symétrie et :

$$\beta = f(\alpha).$$

Symétrie

Si :

$$f(x_1) = f(x_2)$$

avec $x_1 \neq x_2$, alors :

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Variations : $a > 0$

$$f \text{ décroît puis croît}$$

Minimum :

$$\beta.$$

Variations : $a < 0$

$$f \text{ croît puis décroît}$$

Maximum :

$$\beta.$$

Racine

$$x_0 \text{ racine} \iff f(x_0) = 0.$$

Forme factorisée

Si :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

alors :

$$x_1 \text{ et } x_2$$

sont les racines.

Signe si $a > 0$

À l'extérieur des racines :

$$+$$

Entre les racines :

$$-$$

Signe si $a < 0$

À l'extérieur des racines :

$$-$$

Entre les racines :

$$+$$