



Cours : Variables aléatoires

1) Variable aléatoire

Définition

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω .

Une **variable aléatoire** est une fonction qui associe un nombre réel à chaque issue de l'expérience.

On la note généralement :

$$X.$$

Remarque

Une variable aléatoire permet de traduire une situation aléatoire par des nombres.

Par exemple, dans un jeu, elle peut représenter :

$$\text{le gain obtenu}.$$

Exemple

On lance un dé équilibré à six faces.

On définit le gain de la manière suivante :

- si le résultat est 1, 2 ou 3, on perd 5 jetons ;
- si le résultat est 4 ou 5, on gagne 1 jeton ;
- si le résultat est 6, on gagne 10 jetons.

On définit la variable aléatoire X égale au gain obtenu.

Ainsi :

$$X(1) = -5, \quad X(2) = -5, \quad X(3) = -5,$$

$$X(4) = 1, \quad X(5) = 1, \quad X(6) = 10.$$

La variable aléatoire X peut donc prendre les valeurs :

$$-5, \quad 1, \quad 10.$$

Remarque

On parle de **variable aléatoire discrète** lorsque la variable prend un nombre fini, ou que l'on peut énumérer, de valeurs.

Dans ce cours, les variables aléatoires étudiées sont discrètes.

2) Événements liés à une variable aléatoire

Définitions

Si X est une variable aléatoire, l'événement :

$$X = x_i$$

désigne l'ensemble des issues pour lesquelles la variable aléatoire prend la valeur x_i .

L'événement :

$$X \geq x_i$$

désigne l'ensemble des issues pour lesquelles X prend une valeur supérieure ou égale à x_i .

Remarque

De la même manière, on peut utiliser :

$$X > x_i, \quad X < x_i, \quad X \leq x_i.$$

Exemple

Dans le jeu précédent :

$$X = -5$$

correspond aux résultats :

$$1, 2, 3.$$

Donc :

$$\{X = -5\} = \{1; 2; 3\}.$$

De même :

$$X \geq 1$$

correspond aux résultats :

$$4, 5, 6.$$

3) Loi de probabilité

Définition

Soit une variable aléatoire X qui prend les valeurs :

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

La **loi de probabilité de X** associe à chaque valeur x_i la probabilité :

$$P(X = x_i).$$

On note souvent :

$$p_i = P(X = x_i).$$

Propriété

La loi de probabilité peut être présentée dans un tableau :

x_i	x_1	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	$\cdots$	p_n

Propriété

La somme de toutes les probabilités de la loi vaut :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

Autrement dit :

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1.$$

Exemple

On reprend le jeu avec le dé.

Les valeurs possibles de X sont :

$$-5, \quad 1, \quad 10.$$

Comme le dé est équilibré, chaque face a pour probabilité :

$$\frac{1}{6}.$$

La valeur -5 correspond à trois faces :

$$1, \quad 2, \quad 3.$$

Donc :

$$P(X = -5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

La valeur 1 correspond à deux faces :

$$4, \quad 5.$$

Donc :

$$P(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Enfin :

$$P(X = 10) = \frac{1}{6}.$$

La loi de probabilité est donc :

x_i	-5	1	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Vérification :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

4) Espérance

Définition

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs :

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

avec les probabilités :

$$p_1, p_2, \dots, p_n.$$

L'**espérance** de X est :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$$

ou :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

Remarque

L'espérance correspond à la **valeur moyenne que l'on peut espérer obtenir** lorsque l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Elle ne correspond pas forcément à une valeur que X peut réellement prendre.

Méthode

Pour calculer l'espérance :

- 1- On multiplie chaque valeur x_i par sa probabilité p_i .
- 2- On additionne tous les résultats.

$$E(X) = \sum p_i x_i$$

Exemple

Pour le jeu précédent :

$$E(X) = (-5) \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 10 \times \frac{1}{6}.$$

Donc :

$$E(X) = -\frac{5}{2} + \frac{1}{3} + \frac{10}{6}.$$

Or :

$$-\frac{5}{2} = -\frac{15}{6}, \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{6}.$$

Ainsi :

$$E(X) = \frac{-15 + 2 + 10}{6}.$$

Donc :

$$E(X) = -\frac{1}{2}.$$

Cela signifie qu'en répétant beaucoup de parties, on peut s'attendre à perdre en moyenne :

$$0,5 \text{ jeton par partie.}$$

Définition

Si X représente le gain d'un jeu et si :

$$E(X) = 0,$$

on dit que le jeu est **équitable**.

5) Variance

Définition

La **variance** d'une variable aléatoire X est :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2.$$

Autrement dit :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2.$$

Remarque

La variance mesure la **dispersion** des valeurs de X autour de l'espérance.
Plus la variance est grande, plus les résultats peuvent être éloignés de la valeur moyenne.

Attention

La variance est toujours positive ou nulle :

$$V(X) \geq 0.$$

En effet, elle est calculée à partir de carrés.

6) Écart-type

Définition

L'**écart-type** d'une variable aléatoire X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque

L'écart-type mesure lui aussi la dispersion des valeurs autour de l'espérance.
Contrairement à la variance, il est exprimé dans la **même unité que la variable aléatoire**.

Exemple – Énoncé

On reprend la variable aléatoire X de loi :

x_i	-5	1	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

On sait que :

$$E(X) = -\frac{1}{2}.$$

Calculer :

- 1) la variance $V(X)$;
- 2) l'écart-type $\sigma(X)$.

Exemple – Résolution

On utilise :

$$V(X) = \sum p_i (x_i - E(X))^2.$$

Donc :

$$V(X) = \frac{1}{2} \left(-5 + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(10 + \frac{1}{2} \right)^2.$$

Ainsi :

$$V(X) = \frac{1}{2} \left(-\frac{9}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{21}{2} \right)^2.$$

On obtient :

$$V(X) = 29,25.$$

L'écart-type vaut :

$$\sigma(X) = \sqrt{29,25}.$$

Donc :

$$\sigma(X) \approx 5,41.$$

7) Formule de König-Huygens

Propriété

La variance peut aussi être calculée avec :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Or :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2.$$

Donc :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - [E(X)]^2.$$

Remarque

Cette formule est souvent plus rapide que la formule :

$$\sum p_i (x_i - E(X))^2.$$

Dans les exercices, il est donc souvent utile de calculer d'abord :

$$E(X)$$

puis :

$$E(X^2).$$

Exemple

Avec la loi précédente :

$$E(X^2) = 25 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 100 \times \frac{1}{6}.$$

Donc :

$$E(X^2) = \frac{25}{2} + \frac{1}{3} + \frac{50}{3}.$$

On obtient :

$$E(X^2) = 29,5.$$

Comme :

$$E(X) = -\frac{1}{2},$$

on a :

$$V(X) = 29,5 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Donc :

$$V(X) = 29,5 - 0,25.$$

Ainsi :

$$V(X) = 29,25.$$

8) Variable aléatoire de la forme $aX + b$

Définition

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs :

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

On définit :

$$Y = aX + b$$

où a et b sont deux réels.

Alors Y prend les valeurs :

$$ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b.$$

Les probabilités associées restent les mêmes.

Exemple

Supposons que X prenne les valeurs :

$$1, 3, 5.$$

On définit :

$$Y = 2X + 4.$$

Alors :

$$X = 1 \implies Y = 6,$$

$$X = 3 \implies Y = 10,$$

$$X = 5 \implies Y = 14.$$

Ainsi, Y prend les valeurs :

$$6, 10, 14.$$

9) Effet d'une transformation affine

Propriétés

Soit X une variable aléatoire et soient a et b deux réels.

Alors :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$V(aX + b) = a^2V(X)$$

et :

$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

Remarque

Ajouter une constante b :

$$X \mapsto X + b$$

déplace toutes les valeurs, mais ne modifie pas leur dispersion.

Ainsi :

$$V(X + b) = V(X)$$

et :

$$\sigma(X + b) = \sigma(X).$$

Attention

Pour l'espérance :

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Pour la variance, la constante b disparaît :

$$V(aX + b) = a^2V(X).$$

Pour l'écart-type, on utilise :

$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

Exemple

Une variable aléatoire X vérifie :

$$E(X) = 4$$

et :

$$V(X) = 9.$$

On définit :

$$Y = 3X - 2.$$

Calculons l'espérance de Y :

$$E(Y) = 3E(X) - 2.$$

Donc :

$$E(Y) = 3 \times 4 - 2 = 10.$$

Ainsi :

$$\boxed{E(Y) = 10.}$$

Pour la variance :

$$V(Y) = 3^2 V(X).$$

Donc :

$$V(Y) = 9 \times 9 = 81.$$

Ainsi :

$$\boxed{V(Y) = 81.}$$

Enfin :

$$\sigma(X) = \sqrt{9} = 3.$$

Donc :

$$\sigma(Y) = |3| \times 3 = 9.$$

Ainsi :

$$\boxed{\sigma(Y) = 9.}$$

10) Exemple type complet

Exemple – Énoncé

Une variable aléatoire X possède la loi de probabilité suivante :

x_i	-2	1	4
$P(X = x_i)$	0,3	0,5	0,2

- 1) Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
- 2) Calculer $E(X)$.
- 3) Calculer $E(X^2)$.
- 4) En déduire $V(X)$.
- 5) Calculer $\sigma(X)$.

Exemple – Résolution

1) Vérification de la loi

On calcule :

$$0,3 + 0,5 + 0,2 = 1.$$

Les probabilités sont toutes comprises entre 0 et 1 et leur somme vaut 1.

Il s'agit donc bien d'une loi de probabilité.

2) Espérance

$$E(X) = (-2) \times 0,3 + 1 \times 0,5 + 4 \times 0,2.$$

Donc :

$$E(X) = -0,6 + 0,5 + 0,8.$$

Ainsi :

$$E(X) = 0,7.$$

3) Calcul de $E(X^2)$

$$E(X^2) = (-2)^2 \times 0,3 + 1^2 \times 0,5 + 4^2 \times 0,2.$$

Donc :

$$E(X^2) = 4 \times 0,3 + 0,5 + 16 \times 0,2.$$

Ainsi :

$$E(X^2) = 1,2 + 0,5 + 3,2 = 4,9.$$

$$E(X^2) = 4,9.$$

4) Variance

On utilise :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Donc :

$$V(X) = 4,9 - (0,7)^2.$$

Ainsi :

$$V(X) = 4,9 - 0,49 = 4,41.$$

$$V(X) = 4,41.$$

5) Écart-type

$$\sigma(X) = \sqrt{4,41}.$$

Donc :

$$\sigma(X) = 2,1.$$

11) Formules à retenir

Loi de probabilité

Si X prend les valeurs :

$$x_1, \dots, x_n$$

avec :

$$p_i = P(X = x_i),$$

alors :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

ou :

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Espérance

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

c'est-à-dire :

$$E(X) = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n.$$

Variance et écart-type

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$$

Formule de König-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

avec :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2.$$

Écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Transformation affine

Pour :

$$Y = aX + b,$$

on a :

$$E(Y) = aE(X) + b$$

$$V(Y) = a^2V(X)$$

et :

$$\sigma(Y) = |a|\sigma(X).$$