Fonctions affines et croissance linéaire

Objectifs du chapitre

À la fin de ce chapitre, il faut savoir :
- reconnaître une fonction affine, linéaire ou constante ;
- calculer l'image d'un nombre et déterminer un antécédent ;
- interpréter le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine ;
- tracer la représentation graphique d'une fonction affine ;
- déterminer l'expression d'une fonction affine ;
- étudier le sens de variation d'une fonction affine ;
- résoudre une équation ou une inéquation à l'aide d'une fonction affine ;
- modéliser une évolution linéaire continue.

1. Reconnaître et utiliser une fonction affine

1.1. Définition

Définition

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{f(x) = ax + b}$$

où a et b sont deux nombres réels fixés.

Exemple

La fonction définie par :

$$f(x) = 2x + 1$$

est une fonction affine avec :

$$a = 2 \qquad \text{et} \qquad b = 1.$$

La fonction définie par :

$$g(x) = -0,5x + 3$$

est une fonction affine avec :

$$a = -0,5 \qquad \text{et} \qquad b = 3.$$

Remarque

Deux cas particuliers sont à connaître.

- Lorsque $b = 0$, la fonction définie par
$$f(x) = ax$$
est une **fonction linéaire**.
- Lorsque $a = 0$, la fonction définie par
$$f(x) = b$$
est une **fonction constante**.

1.2. Calculer une image

Définition

L'**image** d'un nombre x par une fonction f est le nombre $f(x)$.

Calculer une image

Pour calculer l'image d'un nombre par une fonction :

1. on remplace x par le nombre donné ;
2. on effectue le calcul en respectant les priorités opératoires.

Exemple

On considère la fonction :

$$f(x) = -3x + 5.$$

Calculons l'image de 2.

$$f(2) = -3 \times 2 + 5.$$

$$f(2) = -6 + 5 = -1.$$

Ainsi :

$$\boxed{f(2) = -1}$$

1.3. Déterminer un antécédent

Définition

Dire que x est un **antécédent** de y par la fonction f signifie que :

$$f(x) = y.$$

Déterminer un antécédent

Pour déterminer l'antécédent d'un nombre y par une fonction affine f :

1. on écrit l'équation $f(x) = y$;
2. on résout cette équation.

Exemple

On considère :

$$f(x) = 2x - 3.$$

Déterminons l'antécédent de 7.

$$f(x) = 7$$

équivaut à :

$$2x - 3 = 7.$$

Donc :

$$2x = 10,$$

puis :

$$x = 5.$$

L'antécédent de 7 par f est donc :

$$\boxed{5}$$

2. Représentation graphique d'une fonction affine

2.1. Droite représentative

Propriété

La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite**.
Réciproquement, toute droite non verticale est la représentation graphique d'une fonction affine.

Définition

On considère une fonction affine :

$$f(x) = ax + b.$$

— Le nombre a est appelé le **coefficient directeur** de la droite.

— Le nombre b est appelé l'**ordonnée à l'origine**.

Propriété

La droite représentant la fonction $f(x) = ax + b$ coupe l'axe des ordonnées au point :

$$\boxed{(0; b)}$$

Exemple

On considère la fonction :

$$f(x) = -3x + 4.$$

On identifie :

$$a = -3 \qquad \text{et} \qquad b = 4.$$

La droite coupe donc l'axe des ordonnées au point :

$$A(0; 4).$$

Le coefficient directeur étant négatif, la droite est décroissante.

2.2. Interprétation du coefficient directeur

Propriété

Le coefficient directeur a indique la variation de l'ordonnée lorsque l'abscisse augmente de 1.
Ainsi, en restant sur la droite :

$$\boxed{\text{si } x \text{ augmente de } 1, \text{ alors } y \text{ augmente de } a}$$

Exemple

On considère :

$$f(x) = 2x - 1.$$

L'ordonnée à l'origine est :

$$b = -1.$$

La droite passe donc par :

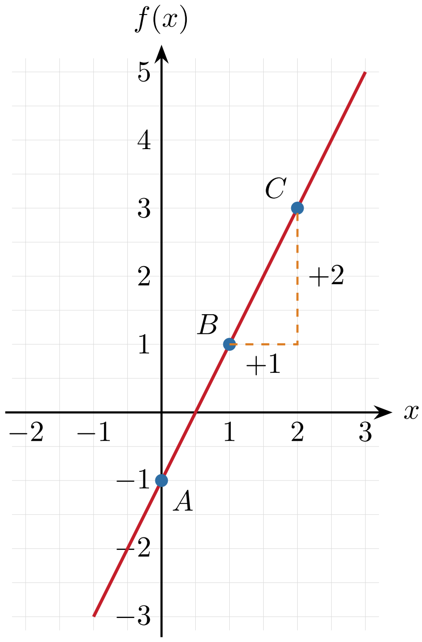
$$A(0; -1).$$

Le coefficient directeur est :

$$a = 2 = \frac{2}{1}.$$

Lorsque l'abscisse augmente de 1, l'ordonnée augmente de 2.
On obtient ainsi les points :

$$B(1; 1) \qquad \text{et} \qquad C(2; 3).$$



2.3. Tracer une droite à partir de son expression

Méthode

Pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine :

1. on choisit deux valeurs distinctes de x ;
2. on calcule leurs images ;
3. on place les deux points obtenus dans un repère ;
4. on trace la droite passant par ces deux points.

Exemple

On considère la fonction :

$$f(x) = -0,5x + 1.$$

On choisit $x = 0$ et $x = 4$.

$$f(0) = -0,5 \times 0 + 1 = 1,$$

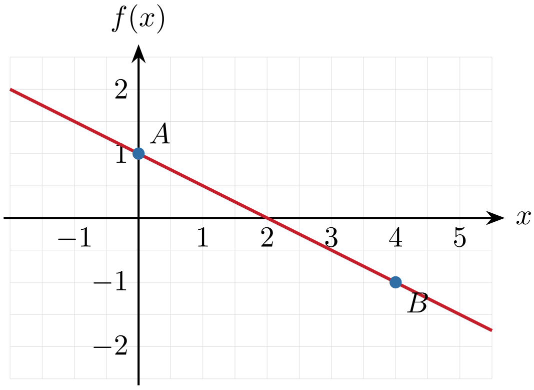
et :

$$f(4) = -0,5 \times 4 + 1 = -2 + 1 = -1.$$

La droite passe donc par les points :

$$A(0; 1) \qquad \text{et} \qquad B(4; -1).$$

x	0	4
$f(x)$	1	-1
Point	A	B



3. Déterminer l'expression d'une fonction affine

3.1. À partir d'un graphique

Méthode

Pour déterminer graphiquement l'expression d'une fonction affine :

1. on lit l'ordonnée à l'origine b ;
2. on détermine le coefficient directeur a ;
3. on écrit l'expression :

$$f(x) = ax + b.$$

Exemple

Une droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0; -2)$.
On a donc :

$$b = -2.$$

Lorsque l'abscisse augmente de 1, l'ordonnée augmente de 2.
Ainsi :

$$a = 2.$$

L'expression de la fonction est donc :

$$\boxed{f(x) = 2x - 2}$$

3.2. À partir de deux points

Propriété

Une droite passe par deux points distincts :

$$A(x_A; y_A) \qquad \text{et} \qquad B(x_B; y_B),$$

avec $x_A \neq x_B$.
Son coefficient directeur est :

$$\boxed{a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Méthode

Pour déterminer l'expression d'une fonction affine à partir de deux points :

1. on calcule le coefficient directeur :
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A};$$
2. on écrit :
$$f(x) = ax + b;$$
3. on utilise les coordonnées de l'un des points pour calculer b.

Exemple

Une droite passe par :

$$A(-2;4) \qquad \text{et} \qquad B(3;1).$$

Calculons son coefficient directeur :

$$a = \frac{1-4}{3-(-2)} = \frac{-3}{5}.$$

On écrit donc :

$$f(x) = -\frac{3}{5}x + b.$$

Comme le point $B(3;1)$ appartient à la droite :

$$1 = -\frac{3}{5} \times 3 + b.$$

$$1 = -\frac{9}{5} + b.$$

Donc :

$$b = 1 + \frac{9}{5} = \frac{14}{5}.$$

Ainsi :

$$\boxed{f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{14}{5}}$$

4. Taux de variation et sens de variation

4.1. Taux de variation

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle.
Pour deux réels distincts x_1 et x_2, le taux de variation de f entre x_1 et x_2 est :

$$\boxed{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

Propriété

Si f est une fonction affine définie par :

$$f(x) = ax + b,$$

alors son taux de variation entre deux nombres distincts est toujours égal à :

$$\boxed{a}$$

Le taux de variation d'une fonction affine est donc constant.

Exemple

On considère :

$$f(x) = 3x - 5.$$

Calculons le taux de variation entre 2 et 6.

$$f(2) = 3 \times 2 - 5 = 1,$$

et :

$$f(6) = 3 \times 6 - 5 = 13.$$

Ainsi :

$$\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{13 - 1}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

On retrouve bien le coefficient directeur :

$$\boxed{a = 3}$$

4.2. Sens de variation

Propriété

Soit une fonction affine définie par :

$$f(x) = ax + b.$$

— Si $a > 0$, la fonction f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
— Si $a < 0$, la fonction f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.
— Si $a = 0$, la fonction f est **constante** sur $\mathbb{R}$.

Exemple

On considère :

$$f(x) = -3x + 7.$$

Le coefficient directeur est :

$$a = -3.$$

Comme :

$$-3 < 0,$$

la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

5. Résoudre des équations et des inéquations

5.1. Résoudre une équation

Méthode

Pour résoudre une équation de la forme :

$$f(x) = k,$$

où f est affine :

1. on remplace $f(x)$ par son expression ;
2. on résout l'équation du premier degré obtenue.

Exemple

On considère :

$$f(x) = 4x - 3.$$

Résolvons :

$$f(x) = 13.$$

On obtient :

$$4x - 3 = 13,$$

puis :

$$4x = 16.$$

Donc :

$$\boxed{x = 4}$$

5.2. Résoudre une inéquation

Méthode

Pour résoudre une inéquation faisant intervenir une fonction affine :

1. on remplace la fonction par son expression ;
2. on résout l'inéquation du premier degré ;
3. si l'on multiplie ou divise par un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité.

Exemple

On considère :

$$f(x) = -2x + 8.$$

Résolvons :

$$f(x) \leq 2.$$

On obtient :

$$-2x + 8 \leq 2.$$

Donc :

$$-2x \leq -6.$$

En divisant par -2, on change le sens de l'inégalité :

$$x \geq 3.$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{[3; +\infty[}$$

6. Modéliser une croissance linéaire continue

Définition

Un phénomène est dit **continu** lorsque la variable peut prendre toutes les valeurs réelles d'un intervalle. C'est par exemple le cas d'une durée mesurée en heures, en minutes ou en secondes.

Définition

Une évolution est dite **linéaire** lorsque la variation de la grandeur étudiée est constante pour des variations égales de la variable.

Propriété

Une évolution linéaire continue peut être modélisée par une fonction affine :

$$\boxed{f(x) = ax + b}$$

où :

— b représente la valeur initiale ;

— a représente la variation de la grandeur lorsque la variable augmente d'une unité.

Exemple

Un réservoir contient initialement 120 litres d'eau.
Il se vide à la vitesse constante de 8 litres par minute.
On note $V(t)$ le volume d'eau, en litres, après t minutes.
La valeur initiale est :

$$V(0) = 120.$$

Le volume diminue de 8 litres par minute.
Le coefficient directeur est donc :

$$a = -8.$$

Ainsi :

$$\boxed{V(t) = 120 - 8t}$$

Remarque

Dans une évolution linéaire, on ajoute ou on retire toujours une même quantité pour une même augmentation de la variable.
Il ne faut pas confondre cette situation avec une évolution en pourcentage, pour laquelle on multiplie la quantité par un même coefficient.

Exercices type bac

Exercice type bac 1 – Refroidissement d'un plat

Victor sort un plat du four. Sa température est alors égale à 180 °C.
Il place ce plat dans une pièce et étudie son refroidissement pendant les premières minutes.
On suppose que la température baisse de manière linéaire.
Trois minutes après la sortie du four, la température du plat est égale à 120 °C.
On note $T(t)$ la température du plat, en degrés Celsius, t minutes après sa sortie du four.

1. Donner la valeur de $T(0)$ et celle de $T(3)$.
2. Calculer le taux de variation de la fonction T entre 0 et 3.
3. En déduire que, pour tout réel t appartenant à l'intervalle étudié :
$$T(t) = -20t + 180.$$
4. Calculer la température du plat cinq minutes après sa sortie du four.
5. Le plat peut être servi lorsque sa température est inférieure ou égale à 60 °C.
Résoudre :
$$T(t) \leq 60$$
puis interpréter le résultat.
6. Le modèle est utilisé seulement tant que la température calculée est supérieure ou égale à 20 °C.
Déterminer la durée maximale pendant laquelle ce modèle peut être utilisé.

Exercice type bac 2 – Deux offres de location

Une entreprise propose deux offres pour la location d'un véhicule.

— **Offre A :** un forfait fixe de 45 euros, puis $0,30$ euro par kilomètre parcouru.

— **Offre B :** un forfait fixe de 75 euros, puis $0,15$ euro par kilomètre parcouru.

On note :
$$A(x)$$
le prix, en euros, de l'offre A pour x kilomètres parcourus, et :
$$B(x)$$
le prix, en euros, de l'offre B pour x kilomètres parcourus.

1. Exprimer $A(x)$ en fonction de x.
2. Exprimer $B(x)$ en fonction de x.
3. Calculer le prix de chaque offre pour une distance de 100 kilomètres.
4. Résoudre l'équation :
$$A(x) = B(x).$$
Interpréter la solution obtenue dans le contexte de l'exercice.
5. Résoudre l'inéquation :
$$A(x) < B(x).$$
Interpréter le résultat.
6. Quelle offre faut-il choisir pour parcourir 350 kilomètres ? Justifier par un calcul.

Corrigé des exercices type bac

Corrigé de l'exercice type bac 1

1. À la sortie du four, le temps écoulé est nul. On a donc :

$$\boxed{T(0) = 180}$$

Trois minutes après la sortie du four :

$$\boxed{T(3) = 120}$$

2. Le taux de variation de T entre 0 et 3 est :

$$\frac{T(3) - T(0)}{3 - 0} = \frac{120 - 180}{3}.$$

$$\frac{-60}{3} = -20.$$

Ainsi :

$$\boxed{-20}$$

La température diminue donc de 20 °C par minute.

3. Puisque la fonction T est affine, elle est de la forme :

$$T(t) = at + b.$$

Le coefficient directeur est :

$$a = -20.$$

De plus :

$$T(0) = 180.$$

L'ordonnée à l'origine est donc :

$$b = 180.$$

Ainsi :

$$\boxed{T(t) = -20t + 180}$$

4. Après cinq minutes :

$$T(5) = -20 \times 5 + 180.$$

$$T(5) = -100 + 180 = 80.$$

La température du plat après cinq minutes est donc :

$$\boxed{80\,°\mathrm{C}}$$

5. On résout :

$$T(t) \leq 60.$$

Soit :

$$-20t + 180 \leq 60.$$

$$-20t \leq -120.$$

En divisant par -20, on change le sens de l'inégalité :

$$t \geq 6.$$

Ainsi :

$$\boxed{t \geq 6}$$

Le plat peut être servi à partir de six minutes après sa sortie du four.

6. Le modèle est utilisable tant que :

$$T(t) \geq 20.$$

On résout :

$$-20t + 180 \geq 20.$$

$$-20t \geq -160.$$

En divisant par -20, on change le sens de l'inégalité :

$$t \leq 8.$$

Le modèle peut donc être utilisé pendant les huit premières minutes :

$$\boxed{0 \leq t \leq 8}$$

Corrigé de l'exercice type bac 2

1. L'offre A comprend un forfait fixe de 45 euros et $0,30$ euro par kilomètre.
   Ainsi :

$$\boxed{A(x) = 0,30x + 45}$$

2. L'offre B comprend un forfait fixe de 75 euros et $0,15$ euro par kilomètre.
   Ainsi :

$$\boxed{B(x) = 0,15x + 75}$$

3. Pour 100 kilomètres :

$$A(100) = 0,30 \times 100 + 45.$$

$$A(100) = 30 + 45 = 75.$$

Donc :

$$\boxed{A(100) = 75 \text{ euros}}$$

Pour l'offre B :

$$B(100) = 0,15 \times 100 + 75.$$

$$B(100) = 15 + 75 = 90.$$

Donc :

$$\boxed{B(100) = 90 \text{ euros}}$$

Pour 100 kilomètres, l'offre A est la moins chère.

4. On résout :

$$A(x) = B(x).$$

Soit :

$$0,30x + 45 = 0,15x + 75.$$

$$0,30x - 0,15x = 75 - 45.$$

$$0,15x = 30.$$

$$x = \frac{30}{0,15} = 200.$$

Ainsi :

$$\boxed{x = 200}$$

Pour une distance de 200 kilomètres, les deux offres ont le même prix.
Vérification :

$$A(200) = 0,30 \times 200 + 45 = 105,$$

et :

$$B(200) = 0,15 \times 200 + 75 = 105.$$

Les deux offres coûtent alors 105 euros.

5. On résout :

$$A(x) < B(x).$$

Soit :

$$0,30x + 45 < 0,15x + 75.$$

$$0,15x < 30.$$

$$x < 200.$$

Ainsi :

$$\boxed{x < 200}$$

Pour une distance strictement inférieure à 200 kilomètres, l'offre A est moins chère que l'offre B.
Pour une distance strictement supérieure à 200 kilomètres, l'offre B est moins chère.

6. Pour 350 kilomètres :

$$A(350) = 0,30 \times 350 + 45.$$

$$A(350) = 105 + 45 = 150.$$

Ainsi :

$$A(350) = 150 \text{ euros}.$$

Pour l'offre B :

$$B(350) = 0,15 \times 350 + 75.$$

$$B(350) = 52,50 + 75 = 127,50.$$

Ainsi :

$$B(350) = 127,50 \text{ euros}.$$

Comme :

$$127,50 < 150,$$

il faut choisir l'offre B.

$$\boxed{\text{L'offre B est la plus avantageuse pour 350 km.}}$$

Retrouve les vidéos et les exercices corrigés sur

`cestcompliquelesmaths.fr`