



Cours : Dérivation

1) Taux de variation

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant deux nombres a et b , avec $a \neq b$.
Le **taux de variation** de f entre a et b est :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Remarque

Le taux de variation mesure la variation moyenne de la fonction entre deux valeurs.
Graphiquement, il correspond au **coefficient directeur** de la droite passant par les points :

$$A(a; f(a))$$

et :

$$B(b; f(b)).$$

Exemple

Soit :

$$f(x) = x^2 - 2.$$

Calculons le taux de variation de f entre 0 et 2.

On a :

$$f(0) = -2$$

et :

$$f(2) = 2.$$

Donc :

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - (-2)}{2} = \frac{4}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{2}.$$

A) Taux d'accroissement en un point

Définition

Soit f une fonction définie autour d'un réel a .

Pour $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque

Le taux d'accroissement :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

est le coefficient directeur de la droite passant par :

$$A(a; f(a))$$

et :

$$M(a+h; f(a+h)).$$

Cette droite est appelée une **sécante** à la courbe de f .

Exemple

Soit :

$$f(x) = x^2.$$

Calculons le taux d'accroissement entre a et $a + h$.

On a :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}.$$

On développe :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h}.$$

Donc :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{2ah + h^2}{h}.$$

On factorise le numérateur par h :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{h(2a + h)}{h}.$$

Comme $h \neq 0$:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a + h.$$

2) Nombre dérivé

Définition

Lorsque h se rapproche de 0, le taux d'accroissement :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

peut se rapprocher d'un nombre réel.

Dans ce cas, on dit que f est **dérivable en a** .

Ce nombre est appelé le **nombre dérivé de f en a** et se note :

$$f'(a).$$

On écrit :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque

Le nombre dérivé $f'(a)$ donne le comportement de la fonction au voisinage immédiat de a .

Graphiquement, il correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a .

Exemple

On considère :

$$f(x) = x^2.$$

Calculons $f'(2)$.

On étudie :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h}.$$

On obtient :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 4}{h}.$$

On développe :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h}.$$

Donc :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{4h + h^2}{h}.$$

Comme $h \neq 0$:

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 4 + h.$$

Lorsque h se rapproche de 0, $4 + h$ se rapproche de 4.

Donc :

$$f'(2) = 4.$$

3) Tangente à une courbe

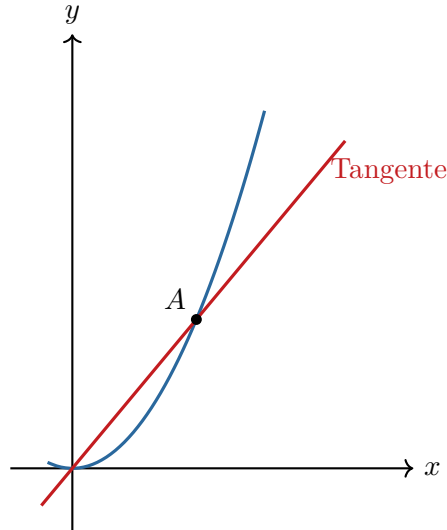
Définition

Si f est dérivable en a , la **tangente** à la courbe de f au point :

$$A(a; f(a))$$

est la droite passant par A et dont le coefficient directeur est :

$$\boxed{f'(a)}.$$



Propriété

L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est :

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

Méthode

Pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a :

1- On calcule :

$$f(a).$$

2- On calcule :

$$f'(a).$$

3- On utilise :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

4- On développe et on simplifie si nécessaire.

Exemple

Soit :

$$f(x) = x^2.$$

On cherche l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse :

$$a = 2.$$

On a :

$$f'(2) = 4$$

et :

$$f(2) = 4.$$

On utilise :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2).$$

Donc :

$$y = 4(x - 2) + 4.$$

Ainsi :

$$y = 4x - 8 + 4.$$

Finalement :

$$\boxed{y = 4x - 4}.$$

4) Fonction dérivée

Définition

Une fonction f est **dérivable sur un intervalle** I si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.
La **fonction dérivée** de f , notée :

$$f',$$

est la fonction qui à chaque réel x de l'intervalle associe le nombre dérivé :

$$\boxed{f'(x)}.$$

Attention

Une fonction peut être définie en un point sans être dérivable en ce point.

Par exemple :

- la fonction racine carrée est définie en 0 mais n'est pas dérivable en 0 ;
- la fonction valeur absolue est définie en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

5) Dérivées des fonctions usuelles

Propriété

Les principales dérivées à connaître sont :

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
k	0
$mx + p$	m
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Attention

Il faut toujours tenir compte de l'ensemble de définition.

La fonction :

$$\frac{1}{x}$$

est dérivable pour :

$$x \neq 0.$$

Plus généralement :

$$\frac{1}{x^n}$$

est dérivable pour :

$$x \neq 0.$$

La fonction :

$$\sqrt{x}$$

est dérivable pour :

$$x > 0.$$

Exemple

Soit :

$$f(x) = x^4.$$

On utilise :

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Donc :

$$f'(x) = 4x^{4-1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{f'(x) = 4x^3}.$$

Exemple

Soit :

$$g(x) = \frac{1}{x^3}.$$

On utilise :

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

Donc :

$$\boxed{g'(x) = -\frac{3}{x^4}}.$$

6) Premières règles de calcul

A) Somme de fonctions

Propriété

Si u et v sont dérivables, alors :

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'}$$

Exemple

Soit :

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x}.$$

Pour $x > 0$:

$$(x^2)' = 2x$$

et :

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Donc :

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

B) Multiplication par une constante

Propriété

Si u est dérivable et si λ est un réel, alors :

$$(\lambda u)' = \lambda u'$$

Exemple

Soit :

$$f(x) = 3x^4.$$

On sait que :

$$(x^4)' = 4x^3.$$

Donc :

$$f'(x) = 3 \times 4x^3.$$

Ainsi :

$$f'(x) = 12x^3.$$

C) Dérivée d'un polynôme

Propriété

Pour dériver un polynôme, on dérive chaque terme séparément.

Par exemple, si :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

alors :

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Méthode

Pour dériver un polynôme :

- 1- On dérive chaque terme séparément.
- 2- On conserve le coefficient placé devant chaque puissance.
- 3- Une constante a pour dérivée :
0.

Exemple

Soit :

$$f(x) = 4x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x - 1.$$

On dérive terme par terme :

$$(4x^4)' = 16x^3,$$

$$(5x^3)' = 15x^2,$$

$$(-7x^2)' = -14x,$$

$$(2x)' = 2,$$

et :

$$(-1)' = 0.$$

Donc :

$$f'(x) = 16x^3 + 15x^2 - 14x + 2.$$

7) Exemple type complet

Exemple

Énoncé

Soit la fonction :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1.$$

- 1) Calculer $f'(x)$.
- 2) Calculer $f'(1)$.
- 3) Calculer $f(1)$.
- 4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Résolution

1) Calcul de la dérivée

On dérive chaque terme :

$$(2x^3)' = 6x^2,$$

$$(-3x^2)' = -6x,$$

$$(4x)' = 4,$$

et :

$$(-1)' = 0.$$

Donc :

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 4.$$

2) Calcul de $f'(1)$

$$f'(1) = 6 \times 1^2 - 6 \times 1 + 4.$$

Donc :

$$f'(1) = 4.$$

3) Calcul de $f(1)$

$$f(1) = 2 \times 1^3 - 3 \times 1^2 + 4 \times 1 - 1.$$

Donc :

$$f(1) = 2 - 3 + 4 - 1.$$

Ainsi :

$$f(1) = 2.$$

4) Équation de la tangente

On utilise :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Ici :

$$a = 1, \quad f'(1) = 4, \quad f(1) = 2.$$

Donc :

8) Formules à retenir

Nombre dérivé et tangente

Taux de variation entre a et b

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Taux d'accroissement entre a et $a + h$

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Nombre dérivé en a

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Équation de la tangente en a

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Dérivées usuelles

$$(k)' = 0$$

$$(mx + p)' = m$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

Règles de calcul

Dérivée d'une somme

$$(u + v)' = u' + v'$$

Multiplication par une constante

$$(\lambda u)' = \lambda u'$$