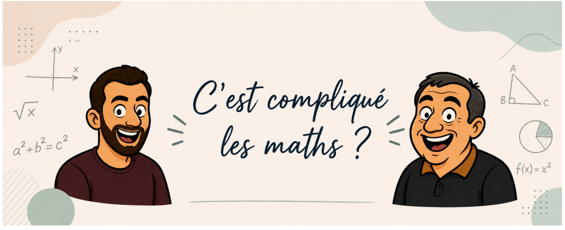

Probabilités

Niveau 3^{e} – Corrigé

Partie 1 : Décrire une expérience aléatoire et calculer une probabilité simple

Exercice 1 – Le distributeur de questions

Compétence travaillée : Décrire une expérience aléatoire, identifier les issues et reconnaître des événements.

Difficulté : ⋆ ○ ○

1. Les issues possibles sont :

   calcul ; géométrie ; probabilités ; algorithmique ; problème.

2. L'événement élémentaire est :

   A : « obtenir une question de géométrie »

   car il ne contient qu'une seule issue.

3. L'événement certain est :

   B : « obtenir une question de mathématiques »

   car toutes les catégories proposées sont des catégories de mathématiques.

4. L'événement impossible est :

   C : « obtenir une question de français »

   car aucune catégorie ne correspond au français.

5. Les issues favorables à D sont :

   $$D = \{\text{calcul}\,;\ \text{problème}\}.$$

Exercice 2 – Jetons numérotés

Compétence travaillée : Déterminer les issues favorables à un événement et à son événement contraire.

Difficulté : ⋆ ○ ○

1. Les issues possibles sont :

   $$1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12.$$

2. Les multiples de 3 sont :

   $$3; 6; 9; 12.$$

   Donc :

   $$A = \{3; 6; 9; 12\}.$$

3. L'événement contraire est :

   $\overline{A}$: « ne pas obtenir un multiple de 3 ».

4. Les issues favorables à $\overline{A}$ sont :

   $$\overline{A} = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11\}.$$

5. Il y a 4 issues favorables à A et 8 issues favorables à $\overline{A}$.

Exercice 3 – Roue de récompenses

Compétence travaillée : Calculer une probabilité dans une situation d'équiprobabilité.

Difficulté : ⋆ ∘ ∘

La roue contient 10 secteurs de même taille.

1. Il y a 3 secteurs bonus :
$$P(\text{bonus}) = \frac{3}{10}.$$
2. Il y a 1 secteur pause :
$$P(\text{pause}) = \frac{1}{10}.$$
3. Il y a 4 secteurs défi et 2 secteurs indice :
$$4 + 2 = 6.$$
Donc :
$$P(\text{défi ou indice}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$
4. Ne pas obtenir défi signifie obtenir bonus, indice ou pause.
Il y a :
$$10 - 4 = 6$$
secteurs favorables.
Donc :
$$P(\text{ne pas obtenir défi}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$
5. Les probabilités simplifiées sont :
$$\frac{3}{10}, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{3}{5}.$$

Exercice 4 – Cartes de révision

Compétence travaillée : Calculer une probabilité et l'exprimer sous forme fractionnaire, décimale et en pourcentage.

Difficulté : ⋆ ⋆ ∘

Il y a 40 cartes au total.

1. Il y a 16 cartes calcul :
$$P(\text{calcul}) = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}.$$
2. Il y a 6 cartes probabilités :
$$P(\text{probabilités}) = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}.$$
3. Il y a 8 cartes géométrie et 10 cartes nombres :
$$8 + 10 = 18.$$
Donc :
$$P(\text{géométrie ou nombres}) = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}.$$
4. Il y a 16 cartes calcul, donc il y a :
$$40 - 16 = 24$$
cartes qui ne sont pas des cartes calcul.
Ainsi :
$$P(\text{ne pas tirer calcul}) = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}.$$
5. On a :
$$P(\text{calcul}) = \frac{16}{40} = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\,\%.$$

Exercice 5 – Sac de badges

Compétence travaillée : Comparer des probabilités et interpréter un résultat.

Difficulté : $\star\star\circ$

Le sac contient 25 badges.

1. Il y a 5 badges rouges :
$$P(\text{rouge}) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$
2. Il y a 9 badges verts :
$$P(\text{vert}) = \frac{9}{25}.$$
3. Il y a 8 badges bleus et 3 badges noirs :
$$8 + 3 = 11.$$
Donc :
$$P(\text{bleu ou noir}) = \frac{11}{25}.$$
4. Obtenir un badge bleu est plus probable qu'obtenir un badge noir, car :
$$\frac{8}{25} > \frac{3}{25}.$$
5. Le jeu est gagnant si le badge n'est pas noir.
Il y a :
$$25 - 3 = 22$$
badges qui ne sont pas noirs.
Donc :
$$P(\text{gagner}) = \frac{22}{25}.$$

Partie 2 : Dénombrements, expériences à deux épreuves et fréquences

Exercice 6 – Deux enfants

Compétence travaillée : Dénombrer les issues d'une expérience aléatoire à deux épreuves.

Difficulté : $\star\star\circ$

1. Les issues possibles sont :
$$FF\ ;\ FG\ ;\ GF\ ;\ GG.$$
2. Il y a 4 issues possibles.
3. L'événement « avoir deux garçons » correspond à :
$$GG.$$
Donc :
$$P(\text{deux garçons}) = \frac{1}{4}.$$
4. L'événement « avoir exactement une fille » correspond à :
$$FG\ ;\ GF.$$
Donc :
$$P(\text{exactement une fille}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$
5. L'événement « avoir au moins une fille » correspond à :
$$FF\ ;\ FG\ ;\ GF.$$
Donc :
$$P(\text{au moins une fille}) = \frac{3}{4}.$$

Exercice 7 – Urne avec remise

Compétence travaillée : Utiliser un tableau à double entrée pour dénombrer les issues d'une expérience à deux épreuves.

Difficulté : $\star\star\circ$

1. Le tableau complété est :

	B	V_1	V_2
B	$(B;B)$	$(B;V_1)$	$(B;V_2)$
V_1	$(V_1;B)$	$(V_1;V_1)$	$(V_1;V_2)$
V_2	$(V_2;B)$	$(V_2;V_1)$	$(V_2;V_2)$

2. Il y a :
$$3 \times 3 = 9$$
issues possibles.

3. Les issues favorables pour tirer deux boules violettes sont :
$$(V_1;V_1),\ (V_1;V_2),\ (V_2;V_1),\ (V_2;V_2).$$
Il y a donc 4 issues favorables.
Ainsi :
$$P(\text{deux violettes}) = \frac{4}{9}.$$

4. Tirer au moins une boule bleue correspond aux issues :
$$(B;B),\ (B;V_1),\ (B;V_2),\ (V_1;B),\ (V_2;B).$$
Il y a 5 issues favorables.
Donc :
$$P(\text{au moins une bleue}) = \frac{5}{9}.$$

5. L'événement contraire de « au moins une bleue » est « aucune bleue », c'est-à-dire « deux violettes ».
Donc :
$$P(\text{au moins une bleue}) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Exercice 8 – Deux dés bien différents

Compétence travaillée : Dénombrer des issues favorables dans une expérience à deux épreuves.

Difficulté : $\star\star\circ$

1. Le dé rouge a 6 résultats possibles et le dé noir aussi.
Donc :
$$6 \times 6 = 36.$$
Il y a 36 issues possibles.

2. Trois issues donnant une somme égale à 7 sont par exemple :
$$(1;6),\ (2;5),\ (3;4).$$

3. Toutes les issues donnant une somme de 7 sont :
$$(1;6),\ (2;5),\ (3;4),\ (4;3),\ (5;2),\ (6;1).$$
Il y en a donc 6.

4. Donc :
$$P(\text{somme } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

5. Les sommes supérieures ou égales à 10 sont 10, 11 et 12.
   Les issues favorables sont :
   $$(4;6), (5;5), (6;4)$$
   pour la somme 10,
   $$(5;6), (6;5)$$
   pour la somme 11,
   $$(6;6)$$
   pour la somme 12.
   Il y a donc :
   $$3+2+1=6$$
   issues favorables.
   Ainsi :
   $$P(\text{somme} \geq 10) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Exercice 9 – Code de casier

Compétence travaillée : Calculer une probabilité à partir d'un dénombrement organisé.

Difficulté : $\star\star\circ$

Chaque symbole est choisi parmi A, B, C et D.

1. Il y a 4 choix pour le premier symbole et 4 choix pour le deuxième.
   Donc :
   $$4 \times 4 = 16.$$
   Il y a 16 codes différents.
2. Les codes qui commencent par A sont :
   $$AA,\ AB,\ AC,\ AD.$$
   Il y en a 4.
3. Donc :
   $$P(\text{commence par } A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$
4. Il y a 16 codes au total.
   Les codes avec deux symboles identiques sont :
   $$AA,\ BB,\ CC,\ DD.$$
   Il y en a 4.
   Donc les codes avec deux symboles différents sont :
   $$16-4=12.$$
5. Ainsi :
   $$P(\text{deux symboles différents}) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Exercice 10 – Fréquences d'un dé

Compétence travaillée : Comparer des fréquences observées avec les probabilités attendues.

Difficulté : $\star\star\circ$

1. Avec un dé équilibré, chaque face a la même probabilité :
   $$P(\text{une face}) = \frac{1}{6} \approx 0{,}167.$$
2. Non, les fréquences observées ne sont pas toutes exactement égales à $\frac{1}{6}$.

3. Oui, les résultats semblent cohérents avec un dé équilibré, car toutes les fréquences sont proches de 0,167.
4. Les nombres pairs sont 2, 4 et 6.
   On additionne les fréquences :
$$0{,}164 + 0{,}166 + 0{,}167 = 0{,}497.$$
5. La probabilité d'obtenir un nombre pair avec un dé équilibré est :
$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$
   La fréquence observée 0,497 est très proche de 0,5.

Exercice 11 – Simulation d'une pièce

Compétence travaillée : Faire le lien entre stabilisation des fréquences et probabilité.

Difficulté : ⋆⋆⋆

1. Avec une pièce équilibrée :
$$P(\text{pile}) = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$
2. On compare les écarts à 0,5 :
$$|0{,}65 - 0{,}5| = 0{,}15,$$
$$|0{,}56 - 0{,}5| = 0{,}06,$$
$$|0{,}508 - 0{,}5| = 0{,}008,$$
$$|0{,}493 - 0{,}5| = 0{,}007,$$
$$|0{,}501 - 0{,}5| = 0{,}001.$$
   La fréquence la plus éloignée de 0,5 est donc 0,65, pour 20 lancers.
3. Lorsque le nombre de lancers augmente, la fréquence de pile se rapproche globalement de 0,5.
4. Non, on ne peut pas affirmer qu'on obtiendra exactement autant de piles que de faces à chaque expérience. Le hasard peut produire des écarts, surtout quand le nombre de lancers est petit.
5. Quand on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence observée se stabilise autour de la probabilité.

Partie 3 : Exercices bilan et type brevet

Exercice 12 – Bilan 1 : tournoi des maisons

Compétence travaillée : Calculer des probabilités, utiliser un événement contraire et interpréter une situation.

Difficulté : ⋆⋆⋆

1. Le nombre total d'élèves inscrits est :
$$42 + 30 + 18 + 10 = 100.$$
2. Il y a 42 élèves dans la maison Phénix :
$$P(\text{Phénix}) = \frac{42}{100} = \frac{21}{50}.$$
3. Il y a 10 élèves dans la maison Nova :
$$P(\text{Nova}) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}.$$
4. Il y a 18 élèves dans la maison Atlas :
$$P(A) = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}.$$

5. L'événement contraire $\overline{A}$ est :

$$\overline{A} : \text{« choisir un élève qui n'est pas dans la maison Atlas ».}$$

6. Première méthode :
Il y a :

$$100 - 18 = 82$$

élèves qui ne sont pas dans la maison Atlas.
Donc :

$$P(\overline{A}) = \frac{82}{100} = \frac{41}{50}.$$

Deuxième méthode :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{9}{50} = \frac{41}{50}.$$

7. La maison qui a le plus de chances d'être choisie est Phénix, car c'est celle qui contient le plus d'élèves inscrits :

$$42 > 30 > 18 > 10.$$

Exercice 13 – Bilan 2 : le jeu des deux cartes

Compétence travaillée : Dénombrer une expérience à deux épreuves avec remise et calculer plusieurs probabilités.

Difficulté : ⋆⋆⋆

1. Le tableau complété est :

	R	D	P
R	$(R;R)$	$(R;D)$	$(R;P)$
D	$(D;R)$	$(D;D)$	$(D;P)$
P	$(P;R)$	$(P;D)$	$(P;P)$

2. Il y a :

$$3 \times 3 = 9$$

issues possibles.

3. L'issue favorable est :

$$(R;R).$$

Donc :

$$P(\text{deux révisions}) = \frac{1}{9}.$$

4. Obtenir exactement une carte piège correspond aux issues :

$$(P;R),\ (P;D),\ (R;P),\ (D;P).$$

Il y a 4 issues favorables.
Donc :

$$P(\text{exactement une piège}) = \frac{4}{9}.$$

5. N'obtenir aucune carte piège correspond aux issues :

$$(R;R),\ (R;D),\ (D;R),\ (D;D).$$

Il y a 4 issues favorables.
Donc :

$$P(\text{aucune piège}) = \frac{4}{9}.$$

6. L'événement contraire de « aucune carte piège » est « au moins une carte piège ».
   Les issues avec au moins une carte piège sont :
   $$(P;R),\ (P;D),\ (P;P),\ (R;P),\ (D;P).$$
   Il y en a 5.
   Donc :
   $$P(\text{aucune piège}) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$
7. Le joueur gagne si aucune carte piège n'est tirée.
   La probabilité de gagner est :
   $$\frac{4}{9}.$$
   Or :
   $$\frac{4}{9} < \frac{1}{2}.$$
   Le jeu n'est donc pas favorable au joueur.

Exercice 14 – Bilan 3 : enquête sur une roue mystérieuse

Compétence travaillée : Interpréter des fréquences obtenues par simulation et estimer des probabilités.

Difficulté : ⋆⋆⋆

1. On calcule :
   $$0{,}35 + 0{,}25 + 0{,}30 + 0{,}10 = 1.$$
   La somme des fréquences est bien égale à 1.
2. On estime :
   $$P(\text{rouge}) \approx 0{,}35.$$
3. La roue possède 20 secteurs.
   Le nombre de secteurs rouges est environ :
   $$0{,}35 \times 20 = 7.$$
4. Pour le bleu :
   $$0{,}25 \times 20 = 5.$$
   Pour le vert :
   $$0{,}30 \times 20 = 6.$$
   Pour le jaune :
   $$0{,}10 \times 20 = 2.$$
   Il y aurait donc environ 5 secteurs bleus, 6 secteurs verts et 2 secteurs jaunes.
5. On estime :
   $$P(J) \approx 0{,}10.$$
   Donc :
   $$P(\overline{J}) \approx 1 - 0{,}10 = 0{,}90.$$
6. On parle d'estimation car les fréquences viennent d'une expérience. Même avec beaucoup de lancers, les fréquences observées peuvent être légèrement différentes des probabilités exactes.

Exercice 15 – Bilan 4 : sujet type brevet

Compétence travaillée : Résoudre un problème complet mêlant dénombrement, probabilité, événement contraire et fréquence.

Difficulté : ⋆⋆⋆

Jeu 1 : la boîte à jetons

1. Le nombre total de jetons est :
$$6 + 4 + 5 + 3 = 18.$$
2. Il y a 6 jetons rouges :
$$P(\text{rouge}) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$
3. Il y a 5 jetons verts et 4 jetons bleus :
$$5 + 4 = 9.$$
Donc :
$$P(\text{vert ou bleu}) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}.$$
4. Le joueur gagne s'il ne tire pas un jeton noir.
Il y a 3 jetons noirs, donc :
$$18 - 3 = 15$$
jetons gagnants.
Donc :
$$P(\text{gagner au jeu 1}) = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}.$$

Jeu 2 : la roue

5. Il y a 1 secteur jackpot sur 12 :
$$P(\text{jackpot}) = \frac{1}{12}.$$
6. Il y a 5 secteurs bonus et 4 secteurs défi :
$$5 + 4 = 9.$$
Donc :
$$P(\text{bonus ou défi}) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$
7. Il y a 2 secteurs piège :
$$P(P) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$
Donc :
$$P(\overline{P}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$
8. Au jeu 1 :
$$P(\text{gagner}) = \frac{5}{6}.$$
Au jeu 2, on gagne si l'on n'obtient pas piège :
$$P(\text{gagner}) = \frac{5}{6}.$$
Les deux jeux donnent donc la même probabilité de gagner.

Simulation

9. Après 1 000 parties, on a obtenu 835 parties gagnantes.
La fréquence est :
$$f = \frac{835}{1000} = 0{,}835.$$
10. La probabilité trouvée à la question 8 est :
$$\frac{5}{6} \approx 0{,}833.$$
La fréquence 0,835 est donc très proche de la probabilité 0,833.
11. La fréquence peut être différente de la probabilité à cause du hasard. Cependant, lorsque le nombre d'expériences est grand, la fréquence a tendance à se rapprocher de la probabilité.

Fin du corrigé