



Cours : Fonction exponentielle

1) Définition de la fonction exponentielle

Théorème

Il existe une unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f'(x) = f(x)$$

pour tout réel x , et :

$$f(0) = 1.$$

Cette fonction est appelée la **fonction exponentielle**.

Définition

La fonction exponentielle est notée :

$$\exp$$

et vérifie, pour tout réel x :

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

ainsi que :

$$\exp(0) = 1.$$

Remarque

La fonction exponentielle possède une propriété très particulière :

$$\text{elle est égale à sa propre dérivée.}$$

Autrement dit, si :

$$\exp(a) = 3,$$

alors :

$$\exp'(a) = 3.$$

2) Propriétés algébriques

Propriété

Pour tout réel x :

$$\exp(x) \times \exp(-x) = 1$$

Propriété

Pour tout réel x :

$$\exp(x) \neq 0.$$

Propriété

Pour tous réels x et y :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Remarque

La fonction exponentielle transforme donc une **somme** en un **produit** :

$$x + y \longrightarrow \exp(x) \exp(y).$$

Exemple

Simplifions :

$$\exp(2 + 5).$$

On utilise :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y).$$

Donc :

$$\exp(7) = \exp(2) \exp(5).$$

De même :

$$\exp(x + 3) = \exp(x) \exp(3).$$

Propriétés

Pour tous réels x et y :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

Et pour tout entier relatif n :

$$(\exp(x))^n = \exp(nx).$$

Exemple

On a :

$$\exp(-5) = \frac{1}{\exp(5)}.$$

De plus :

$$\exp(7 - 2x) = \frac{\exp(7)}{\exp(2x)}.$$

Enfin :

$$(\exp(5))^3 = \exp(15).$$

3) La notation e^x

Définition

On note :

$$e = \exp(1).$$

Le nombre e vaut approximativement :

$$e \approx 2,718.$$

Propriété

Pour tout réel x :

$$\exp(x) = e^x.$$

On utilise donc désormais principalement la notation :

$$e^x.$$

Exemple

On a :

$$\exp(3) = e^3$$

et :

$$\exp(-2) = e^{-2}.$$

Ainsi :

$$e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

4) Calculs avec les exponentielles

Propriétés

Pour tous réels x et y :

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

et pour tout entier relatif n :

$$(e^x)^n = e^{nx}.$$

Remarque

L'exponentielle transforme :

les sommes en produits

les différences en quotients

et :

les multiplications par un entier en puissances.

Exemple

Simplifions les expressions suivantes.

1)

$$e^2 \times e^3 = e^{2+3} = \boxed{e^5}.$$

2)

$$\frac{e^7}{e^2} = e^{7-2} = \boxed{e^5}.$$

3)

$$(e^{x-2})^2 = e^{2(x-2)} = \boxed{e^{2x-4}}.$$

Attention

En général :

$$e^{x+y} \neq e^x + e^y.$$

La bonne formule est :

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

5) Signe et dérivée de la fonction exponentielle

Propriété

Pour tout réel x :

$$e^x > 0.$$

La fonction exponentielle est donc toujours strictement positive.

Propriété

La dérivée de la fonction exponentielle est :

$$(e^x)' = e^x.$$

Remarque

Comme :

$$e^x > 0$$

pour tout réel x , on a :

$$(e^x)' > 0.$$

La dérivée de la fonction exponentielle est donc strictement positive sur $\mathbb{R}$.

6) Variations de la fonction exponentielle

Propriété

La fonction :

$$x \longmapsto e^x$$

est **strictement croissante sur $\mathbb{R}$** .

Remarque

On connaît notamment :

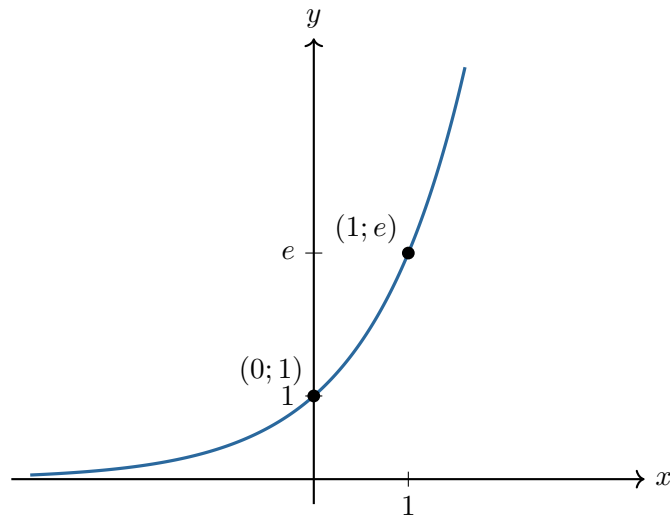
$$e^0 = 1$$

et :

$$e^1 = e.$$

Donc :

$$e^0 = 1 < e.$$



Propriétés

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante :

$$x \leq 0 \implies 0 < e^x \leq 1$$

et :

$$x \geq 0 \implies e^x \geq 1.$$

7) Comparer des exponentielles

Propriété

Pour tous réels x et y :

$$e^x = e^y \iff x = y$$

et :

$$e^x < e^y \iff x < y.$$

De même :

$$e^x \leq e^y \iff x \leq y.$$

Remarque

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, pour comparer deux exponentielles, il suffit de comparer leurs exposants.

Méthode

Pour résoudre une équation de la forme :

$$e^{u(x)} = e^{v(x)},$$

on utilise :

$$u(x) = v(x).$$

Pour résoudre une inéquation :

$$e^{u(x)} < e^{v(x)},$$

on utilise :

$$u(x) < v(x).$$

Le sens de l'inégalité ne change pas car la fonction exponentielle est strictement croissante.

Exemple

Résolvons :

$$e^{2x-8} = e^{-3x+2}.$$

Comme :

$$e^a = e^b \iff a = b,$$

on obtient :

$$2x - 8 = -3x + 2.$$

Donc :

$$5x = 10.$$

Ainsi :

$$x = 2.$$

Exemple

Résolvons :

$$e^{4x-3} = 1.$$

On sait que :

$$1 = e^0.$$

Donc :

$$e^{4x-3} = e^0.$$

Ainsi :

$$4x - 3 = 0.$$

Donc :

$$x = \frac{3}{4}.$$

Exemple

Réolvons :

$$e^{-3x-9} < e^3.$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante :

$$-3x - 9 < 3.$$

Donc :

$$-3x < 12.$$

En divisant par -3 , on inverse le sens de l'inégalité :

$$x > -4.$$

8) Lien avec les suites géométriques

Propriété

Soit a un réel.

On considère la suite :

$$u_n = e^{na}.$$

Alors :

$$u_n = (e^a)^n.$$

La suite (u_n) est donc géométrique de premier terme :

$$u_0 = 1$$

et de raison :

$$q = e^a.$$

Exemple

On considère :

$$u_n = e^{2n}.$$

On écrit :

$$u_n = (e^2)^n.$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison :

$$q = e^2.$$

Comme :

$$e^2 > 1,$$

la suite est strictement croissante.

Propriété

Pour la suite :

$$u_n = e^{na},$$

on a :

$$a > 0 \implies (u_n) \text{ est strictement croissante}$$

et :

$$a < 0 \implies (u_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

Exemple

On considère :

$$v_n = e^{-2n}.$$

Ici :

$$a = -2 < 0.$$

La suite (v_n) est donc :

$$\text{strictement décroissante.}$$

9) Exponentielle d'une fonction

Définition

Soit u une fonction définie sur un intervalle.

La fonction :

$$x \longmapsto e^{u(x)}$$

est appelée **exponentielle de u** .

Propriété

Pour toute valeur de x pour laquelle $u(x)$ est définie :

$$e^{u(x)} > 0.$$

Propriété

Si u est dérivable, alors la fonction :

$$f(x) = e^{u(x)}$$

est dérivable et :

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

Autrement dit :

$$(e^u)' = u'e^u.$$

Méthode

Pour dériver une fonction de la forme :

$$f(x) = e^{u(x)},$$

on procède ainsi :

1- On identifie :

$$u(x).$$

2- On calcule :

$$u'(x).$$

3- On applique :

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$

Exemple

Soit :

$$f(x) = e^{-2x+1}.$$

On pose :

$$u(x) = -2x + 1.$$

Alors :

$$u'(x) = -2.$$

On utilise :

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$

Donc :

$$f'(x) = -2e^{-2x+1}.$$

10) Variations d'une fonction de la forme $e^{u(x)}$

Propriété

Soit :

$$f(x) = e^{u(x)}$$

avec u dérivable.

On a :

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$

Or :

$$e^{u(x)} > 0.$$

Donc $f'(x)$ et $u'(x)$ ont toujours le même signe.

Ainsi :

$$e^{u(x)} \text{ a le même sens de variation que } u(x).$$

Exemple

Étudions les variations de :

$$f(x) = e^{-3x+2}.$$

On pose :

$$u(x) = -3x + 2.$$

La fonction u est affine de coefficient directeur :

$$-3 < 0.$$

Elle est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent :

$$f(x) = e^{-3x+2} \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.$$

On peut également le vérifier grâce à la dérivée :

$$f'(x) = -3e^{-3x+2}.$$

Comme :

$$e^{-3x+2} > 0,$$

on a :

$$f'(x) < 0.$$

11) Exemple type complet

Exemple – Énoncé

Soit la fonction :

$$f(x) = e^{x^2-4x}.$$

- 1) Calculer $f'(x)$.
- 2) Étudier le signe de $f'(x)$.
- 3) En déduire les variations de f .
- 4) Déterminer la valeur minimale de f .

Exemple – Résolution

1) Calcul de la dérivée

On pose :

$$u(x) = x^2 - 4x.$$

Alors :

$$u'(x) = 2x - 4.$$

Comme :

$$f(x) = e^{u(x)},$$

on utilise :

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$

Donc :

$$\boxed{f'(x) = (2x - 4)e^{x^2 - 4x}}.$$

2) Étude du signe

Pour tout réel x :

$$e^{x^2 - 4x} > 0.$$

Le signe de $f'(x)$ dépend donc uniquement du signe de :

$$2x - 4.$$

On résout :

$$2x - 4 = 0.$$

Donc :

$$\boxed{x = 2}.$$

Ainsi :

$$2x - 4 < 0 \quad \text{si} \quad x < 2,$$

et :

$$2x - 4 > 0 \quad \text{si} \quad x > 2.$$

Donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

3) Variations

La fonction f est donc :

$\boxed{\text{strictement décroissante sur }]-\infty; 2]}$

puis :

$\boxed{\text{strictement croissante sur } [2; +\infty[}.$

4) Minimum

La dérivée passe de négative à positive en 2.

La fonction admet donc un minimum pour : cestcompliquelesmaths.fr

12) Formules à retenir

Définition et dérivée

$$e^0 = 1$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$e^x > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$e \approx 2,718$$

Règles de calcul

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

Comparer des exponentielles

$$e^x = e^y \iff x = y$$

$$e^x < e^y \iff x < y$$

$$e^x \leq e^y \iff x \leq y$$

Exponentielle d'une fonction

Si :

$$f(x) = e^{u(x)},$$

alors :

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

ou plus simplement :

$$(e^u)' = u' e^u.$$

Comme :

$$e^{u(x)} > 0,$$

f' et u' ont le même signe.

Donc :

$$e^{u(x)} \text{ et } u(x) \text{ ont le même sens de variation.}$$

Lien avec les suites géométriques

Si :

$$u_n = e^{na},$$

alors :

$$u_n = (e^a)^n.$$

La suite est donc géométrique de raison :

$$q = e^a.$$

$$a > 0 \implies (u_n) \text{ croissante}$$

$$a < 0 \implies (u_n) \text{ décroissante}$$