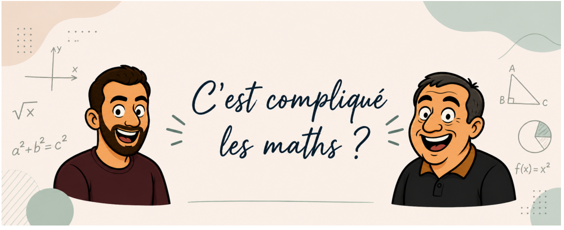

Correction – Planche d'exercices – Arithmétique

Partie 1 : rappels – division, multiples, diviseurs et nombres premiers

Exercice 1

1) $847 \div 6$: $q = 141$ et $r = 1$ donc $847 = 6 \times 141 + 1$.
2) $1\,329 \div 11$: $q = 120$ et $r = 9$ donc $1\,329 = 11 \times 120 + 9$.
3) $2\,574 \div 25$: $q = 102$ et $r = 24$ donc $2\,574 = 25 \times 102 + 24$.
4) $6\,018 \div 17$: $q = 354$ et $r = 0$ donc $6\,018 = 17 \times 354 + 0$.

Exercice 2

1) $95 = 8 \times 11 + 7$ est une division euclidienne car $0 \leq 7 < 8$.
2) $127 = 12 \times 9 + 19$ n'est pas une division euclidienne car $19 > 12$.
3) $214 = 15 \times 14 + 4$ est une division euclidienne car $0 \leq 4 < 15$.
4) $356 = 20 \times 17 + 16$ est une division euclidienne car $0 \leq 16 < 20$.

Exercice 3

1) 72 est un multiple de 9 car $72 = 9 \times 8$.
2) 8 est un diviseur de 96 car $96 = 8 \times 12$.
3) 135 est un multiple de 15 car $135 = 15 \times 9$.
4) 11 est un diviseur de 121 car $121 = 11 \times 11$.

Exercice 4

1) Diviseurs de 28 : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28.
2) Diviseurs de 45 : 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 45.
3) Diviseurs de 64 : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64.
4) Diviseurs de 81 : 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81.

Exercice 5

1) Les huit premiers multiples non nuls de 6 sont :

$$6;\ 12;\ 18;\ 24;\ 30;\ 36;\ 42;\ 48.$$

2) Les six premiers multiples non nuls de 13 sont :

$$13;\ 26;\ 39;\ 52;\ 65;\ 78.$$

3) Les multiples de 9 compris entre 70 et 130 sont :

$$72;\ 81;\ 90;\ 99;\ 108;\ 117;\ 126.$$

4) Les multiples de 16 compris entre 100 et 180 sont :

$$112;\ 128;\ 144;\ 160;\ 176.$$

Exercice 6

Nombre	2	3	5	9	10
630	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*
1 245	*non*	*oui*	*oui*	*non*	*non*
2 106	*oui*	*oui*	*non*	*oui*	*non*
4 095	*non*	*oui*	*oui*	*oui*	*non*
7 280	*oui*	*non*	*oui*	*non*	*oui*

Exercice 7

1) $3 + 6 + 7 + 2 = 18$. Donc $3\,672$ est divisible par 3 et par 9.
2) $8\,450$ se termine par 0, donc il est divisible par 5 et par 10.
3) $6\,318$ est pair, donc divisible par 2. De plus $6 + 3 + 1 + 8 = 18$, donc il est divisible par 3.
4) $9 + 9 + 9 + 9 = 36$, donc $9\,999$ est divisible par 9.

Exercice 8

1) Vrai : si a est un multiple de b, alors $a = b \times k$, donc b divise a.
2) Faux : 7 divise 56, mais 56 ne divise pas 7. On peut dire que 56 est un multiple de 7.
3) Vrai : par définition, un nombre pair est divisible par 2.
4) Faux : 12 est divisible par 3, mais pas par 9.

Exercice 9

1) 96 convient car $96 = 12 \times 8$.
2) 56 convient car $56 = 8 \times 7 = 14 \times 4$.
3) 24, 32, 48 ou 96 conviennent. Par exemple 24 car $96 = 24 \times 4$.
4) 18 convient car $72 = 18 \times 4$ et $90 = 18 \times 5$.

Exercice 10

1) $156 = 12 \times 13$. Donc 156 est un multiple de 12 et 12 est un diviseur de 156.
2) $225 = 15 \times 15$. Donc 225 est un multiple de 15 et 15 est un diviseur de 225.
3) $384 = 24 \times 16$. Donc 384 est un multiple de 24 et 24 est un diviseur de 384.
4) $1\,001 = 13 \times 77$. Donc $1\,001$ est un multiple de 13 et 13 est un diviseur de $1\,001$.

Exercice 11

Les nombres premiers sont :

$$17 \quad ; \quad 37 \quad ; \quad 53 \quad ; \quad 101.$$

Les autres ne sont pas premiers :

$$21 = 3 \times 7, \quad 49 = 7 \times 7, \quad 91 = 7 \times 13, \quad 111 = 3 \times 37.$$

Exercice 12

1) 29 est premier.
2) 57 n'est pas premier car $57 = 3 \times 19$.
3) 83 est premier.
4) 121 n'est pas premier car $121 = 11 \times 11$.
5) 143 n'est pas premier car $143 = 11 \times 13$.

Exercice 13

1) Diviseurs de 36 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36.
2) Diviseurs de 54 : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18 ; 27 ; 54.
3) Les diviseurs communs sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18.
4) Le plus grand diviseur commun à 36 et 54 est donc 18.

Exercice 14

1) $132 \div 6 = 22$, donc il peut faire des pochettes de 6 feuilles.
2) $132 \div 8 = 16$ reste 4, donc il ne peut pas faire des pochettes de 8 feuilles.
3) Par exemple, il peut faire des pochettes de 2, 3 ou 12 feuilles.
4) Le plus grand nombre de feuilles par pochette est 132, si on ne fait qu'une seule pochette.

Partie 2 : décompositions en produit de facteurs premiers

Exercice 15

1) $48 = 2^4 \times 3$.
2) $72 = 2^3 \times 3^2$.
3) $90 = 2 \times 3^2 \times 5$.
4) $126 = 2 \times 3^2 \times 7$.

Exercice 16

1) $84 = 2^2 \times 3 \times 7$.
2) $105 = 3 \times 5 \times 7$.
3) $150 = 2 \times 3 \times 5^2$.
4) $196 = 2^2 \times 7^2$.

Exercice 17

1) $216 = 2^3 \times 3^3$.
2) $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$.
3) $315 = 3^2 \times 5 \times 7$.
4) $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$.

Exercice 18

1) $528 = 2^4 \times 3 \times 11$.
2) $675 = 3^3 \times 5^2$.
3) $784 = 2^4 \times 7^2$.
4) $1\,080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$.

Exercice 19

1) $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.
2) $294 = 2 \times 3 \times 7^2$.
3) $432 = 2^4 \times 3^3$.
4) $770 = 2 \times 5 \times 7 \times 11$.

Exercice 20

$$A = 2^3 \times 3^2 \times 5 \qquad \text{et} \qquad B = 2^2 \times 3 \times 7.$$

1) $A = 8 \times 9 \times 5 = 360$.
2) $B = 4 \times 3 \times 7 = 84$.
3) Deux diviseurs communs à A et B sont par exemple 2 et 12.
4) Un multiple commun à A et B est par exemple $A \times B = 360 \times 84 = 30\,240$.

Exercice 21

$$360 = 36 \times 10 = 2^2 \times 3^2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$$

1) 360 est divisible par 8 car $8 = 2^3$ et la décomposition contient 2^3.
2) 360 est divisible par 9 car $9 = 3^2$ et la décomposition contient 3^2.
3) 360 n'est pas divisible par 25 car $25 = 5^2$ et la décomposition ne contient qu'un seul facteur 5.
4) 360 n'est pas divisible par 11 car la décomposition ne contient pas le facteur premier 11.

Exercice 22

1) $40 = 2^3 \times 5$. Ses diviseurs sont :
$$1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 8;\ 10;\ 20;\ 40.$$
2) $56 = 2^3 \times 7$. Ses diviseurs sont :
$$1;\ 2;\ 4;\ 7;\ 8;\ 14;\ 28;\ 56.$$
3) $75 = 3 \times 5^2$. Ses diviseurs sont :
$$1;\ 3;\ 5;\ 15;\ 25;\ 75.$$

Exercice 23

1) $168 = 2^3 \times 3 \times 7$.
2) $240 = 2^4 \times 3 \times 5$.
3) Les facteurs communs sont 2^3 et 3.
4) Donc :

$$PGCD(168; 240) = 2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24.$$

Exercice 24

1)

$$144 = 2^4 \times 3^2 \qquad \text{et} \qquad 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7.$$

2) Les facteurs communs sont 2 et 3, donc :

$$PGCD(144; 210) = 2 \times 3 = 6.$$

3) Pour le PPCM, on prend tous les facteurs avec le plus grand exposant :

$$PPCM(144; 210) = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 5\,040.$$

Exercice 25

1) $54 = 2 \times 3^3$ et $90 = 2 \times 3^2 \times 5$, donc $PGCD(54; 90) = 2 \times 3^2 = 18$.
2) $96 = 2^5 \times 3$ et $128 = 2^7$, donc $PGCD(96; 128) = 2^5 = 32$.
3) $175 = 5^2 \times 7$ et $245 = 5 \times 7^2$, donc $PGCD(175; 245) = 5 \times 7 = 35$.
4) $198 = 2 \times 3^2 \times 11$ et $330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$, donc $PGCD(198; 330) = 2 \times 3 \times 11 = 66$.

Exercice 26

1) $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$, donc $PPCM(12; 18) = 2^2 \times 3^2 = 36$.
2) $20 = 2^2 \times 5$ et $28 = 2^2 \times 7$, donc $PPCM(20; 28) = 2^2 \times 5 \times 7 = 140$.
3) $45 = 3^2 \times 5$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, donc $PPCM(45; 60) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.
4) $72 = 2^3 \times 3^2$ et $96 = 2^5 \times 3$, donc $PPCM(72; 96) = 2^5 \times 3^2 = 288$.

Exercice 27

$$N = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 8 \times 9 \times 5 = 360.$$

1) $N = 360$.
2) N est divisible par 6 car $6 = 2 \times 3$.
   N est divisible par 10 car $10 = 2 \times 5$.
   N est divisible par 18 car $18 = 2 \times 3^2$.
   N est divisible par 40 car $40 = 2^3 \times 5$.
3) Quatre diviseurs de N supérieurs à 20 sont par exemple :

$$24;\ 30;\ 36;\ 40.$$

Partie 3 : simplifier des fractions, PGCD et PPCM

Exercice 28

$$\frac{18}{24}=\frac{3}{4} \qquad \frac{35}{49}=\frac{5}{7} \qquad \frac{42}{56}=\frac{3}{4} \qquad \frac{63}{81}=\frac{7}{9}$$

Exercice 29

$$\frac{72}{90}=\frac{4}{5} \qquad \frac{84}{126}=\frac{2}{3} \qquad \frac{110}{154}=\frac{5}{7} \qquad \frac{132}{180}=\frac{11}{15}$$

Exercice 30

$$PGCD(96;144)=48 \quad \text{donc} \quad \frac{96}{144}=\frac{2}{3}$$
$$PGCD(150;225)=75 \quad \text{donc} \quad \frac{150}{225}=\frac{2}{3}$$
$$PGCD(168;252)=84 \quad \text{donc} \quad \frac{168}{252}=\frac{2}{3}$$
$$PGCD(210;294)=42 \quad \text{donc} \quad \frac{210}{294}=\frac{5}{7}$$

Exercice 31

$$126=2\times3^2\times7 \qquad 198=2\times3^2\times11$$

$$\frac{126}{198}=\frac{7}{11}$$

$$175=5^2\times7 \qquad 275=5^2\times11$$

$$\frac{175}{275}=\frac{7}{11}$$

$$216=2^3\times3^3 \qquad 360=2^3\times3^2\times5$$

$$\frac{216}{360}=\frac{3}{5}$$

$$315=3^2\times5\times7 \qquad 420=2^2\times3\times5\times7$$

$$\frac{315}{420}=\frac{3}{4}$$

Exercice 32

$$234=2\times3^2\times13 \qquad 360=2^3\times3^2\times5.$$

Les facteurs communs sont 2 et 3^2, donc :

$$PGCD(234;360)=2\times3^2=18.$$

Ainsi :

$$\frac{234}{360}=\frac{234\div18}{360\div18}=\frac{13}{20}.$$

La fraction $\frac{13}{20}$ est irréductible car 13 et 20 n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exercice 33

$$154=2\times7\times11 \qquad 231=3\times7\times11.$$

Les facteurs communs sont 7 et 11, donc :

$$PGCD(154;231)=7\times11=77.$$

Alors :

$$\frac{154}{231}=\frac{154\div77}{231\div77}=\frac{2}{3}.$$

Exercice 34

$$108 = 2^2 \times 3^3 \qquad 162 = 2 \times 3^4.$$

Les facteurs communs sont 2 et 3^3, donc :

$$PGCD(108; 162) = 2 \times 3^3 = 54.$$

Le chocolatier peut préparer au maximum 54 sachets.
Chaque sachet contiendra :

$$108 \div 54 = 2 \qquad \text{et} \qquad 162 \div 54 = 3.$$

Donc chaque sachet contiendra 2 truffes et 3 caramels.

Exercice 35

$$96 = 2^5 \times 3 \qquad 120 = 2^3 \times 3 \times 5.$$

Les facteurs communs sont 2^3 et 3, donc :

$$PGCD(96; 120) = 2^3 \times 3 = 24.$$

La fleuriste peut réaliser au maximum 24 bouquets.
Chaque bouquet contiendra :

$$96 \div 24 = 4 \qquad \text{et} \qquad 120 \div 24 = 5.$$

Donc chaque bouquet contiendra 4 roses et 5 tulipes.
De plus :

$$\frac{96}{120} = \frac{4}{5}.$$

La fraction simplifiée correspond au rapport entre le nombre de roses et le nombre de tulipes dans un bouquet.

Exercice 36

$$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \qquad 378 = 2 \times 3^3 \times 7.$$

Les facteurs communs sont 2, 3^2 et 7, donc :

$$PGCD(252; 378) = 2 \times 3^2 \times 7 = 126.$$

La longueur maximale d'un morceau est donc 126 cm.
Nombre de morceaux :

$$252 \div 126 = 2 \qquad \text{et} \qquad 378 \div 126 = 3.$$

Il obtiendra donc 2 morceaux avec la première planche et 3 morceaux avec la seconde.
Au total :

$$2 + 3 = 5.$$

Il obtiendra 5 morceaux.

Exercice 37

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \qquad 252 = 2^2 \times 3^2 \times 7.$$

Les facteurs communs sont 2^2 et 3^2, donc :

$$PGCD(180; 252) = 2^2 \times 3^2 = 36.$$

On peut donc faire au maximum 36 lots.
Chaque lot contiendra :

$$180 \div 36 = 5 \qquad \text{et} \qquad 252 \div 36 = 7.$$

Donc chaque lot contiendra 5 stylos bleus et 7 stylos noirs.
Enfin :

$$\frac{180}{252} = \frac{5}{7}.$$

La fraction simplifiée représente le rapport entre le nombre de stylos bleus et le nombre de stylos noirs dans un lot.

Exercice 38

$$18 = 2 \times 3^2 \qquad 30 = 2 \times 3 \times 5.$$

Pour le PPCM, on prend tous les facteurs avec le plus grand exposant :

$$PPCM(18;30) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90.$$

Les deux lumières s'allumeront de nouveau ensemble au bout de 90 secondes.
Or 90 secondes = 1 minute 30 secondes.
Elles s'allumeront donc ensemble à :

$$14 \text{ h } 01 \text{ min } 30 \text{ s.}$$

Exercice 39

$$42 = 2 \times 3 \times 7 \qquad 56 = 2^3 \times 7.$$

Donc :

$$PPCM(42;56) = 2^3 \times 3 \times 7 = 168.$$

Les deux coureurs se retrouveront ensemble sur la ligne de départ au bout de 168 secondes.
Nombre de tours du premier coureur :

$$168 \div 42 = 4.$$

Nombre de tours du second coureur :

$$168 \div 56 = 3.$$

Le premier aura fait 4 tours et le second aura fait 3 tours.

Exercice 40

$$24 = 2^3 \times 3 \qquad 36 = 2^2 \times 3^2.$$

Donc :

$$PPCM(24;36) = 2^3 \times 3^2 = 72.$$

Les deux camions repasseront ensemble dans 72 jours.
Pendant cette durée, le camion de livres aura effectué :

$$72 \div 24 = 3$$

passages.
Le camion de jeux aura effectué :

$$72 \div 36 = 2$$

passages.

Exercice 41

$$288 = 2^5 \times 3^2 \qquad 420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7.$$

Les facteurs communs sont 2^2 et 3, donc :

$$PGCD(288;420) = 2^2 \times 3 = 12.$$

On peut donc fabriquer au maximum 12 coffrets.
Chaque coffret contiendra :

$$288 \div 12 = 24 \qquad \text{et} \qquad 420 \div 12 = 35.$$

Donc chaque coffret contiendra 24 cartes et 35 jetons.
Pour les machines :

$$18 = 2 \times 3^2 \qquad 24 = 2^3 \times 3.$$

Donc :

$$PPCM(18;24) = 2^3 \times 3^2 = 72.$$

Les deux machines seront de nouveau révisées le même jour dans 72 jours.