



Correction des exercices Dérivation

Partie 1 : Taux de variation et sécantes

Exercice 1 – Calculer un taux de variation

1.

$$f(1) = 0, \quad f(3) = 12.$$

2.

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{12}{2} = \boxed{6}.$$

3.

$$f(2) = 5, \quad \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \boxed{5}.$$

4. Les nombres 6 et 5 sont les coefficients directeurs des sécantes correspondantes.

Exercice 2 – Taux de variation avec un paramètre

1.

$$f(2) = 4 - 8 + 1 = \boxed{-3}.$$

2.

$$\begin{aligned} f(2+h) &= (2+h)^2 - 4(2+h) + 1 \\ &= \boxed{h^2 - 3}. \end{aligned}$$

3.

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{h^2}{h} = \boxed{h}.$$

4. Pour $h = 1, 0,1$ et $0,01$, les taux valent respectivement :

$$\boxed{1; 0,1; 0,01}.$$

5. Lorsque $h \rightarrow 0$, le taux tend vers $\boxed{0}$.

Exercice 3 – Sécantes à une courbe

1.

$$\boxed{A(1; 1)}.$$

2.

$$\boxed{B_2(3; 9), \quad B_1(2; 4)}.$$

3.

$$\begin{aligned} m_h &= \frac{(1+h)^2 - 1}{h} \\ &= \frac{2h + h^2}{h} \\ &= \boxed{2 + h}. \end{aligned}$$

4. Lorsque $h \rightarrow 0$:

$$\boxed{m_h \rightarrow 2}.$$

5. Les sécantes tendent vers la tangente en A , de coefficient directeur 2.

Partie 2 : Nombre dérivé et tangentes

Exercice 4 – Déterminer un nombre dérivé

1.

$$f(1) = \boxed{4}.$$

2.

$$f(1+h) = 4 + 6h + 3h^2.$$

3.

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 6 + 3h.$$

4.

$$\boxed{f'(1) = 6}.$$

5. La tangente au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 6.

Exercice 5 – Un nombre dérivé négatif

1.

$$f(2) = -8 + 6 + 4 = \boxed{2}.$$

2.

$$f(2+h) = 2 - 5h - 2h^2.$$

3.

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \boxed{-5 - 2h}.$$

4.

$$\boxed{f'(2) = -5}.$$

5. La tangente est descendante : son coefficient directeur est négatif.

Exercice 6 – Lecture graphique

1.

$$\boxed{f(0) = 0, \quad f(1) = -1, \quad f(2) = 0}.$$

2. Les coefficients directeurs sont :

$$-2, \quad 0, \quad 2.$$

3.

$$\boxed{f'(0) = -2, \quad f'(1) = 0, \quad f'(2) = 2}.$$

4. La tangente est horizontale au point d'abscisse 1.

5. Le nombre dérivé vaut alors $\boxed{0}$.

Exercice 7 – Construire une tangente

1.

$$\boxed{A(2; 3)}.$$

2. Le coefficient directeur est -2 .

3. On place $A(2; 3)$.

4. Depuis A , on avance d'une unité vers la droite et on descend de deux unités.

5. On obtient :

$$\boxed{B(3; 1)}.$$

La tangente passe par A et B . Son équation est :

$$\boxed{y = -2x + 7}.$$

Partie 3 : Équations de tangentes

Exercice 8 – Première équation de tangente

1.

$$f(1) = \boxed{2}.$$

2.

$$f'(1) = \boxed{5}.$$

3.

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

4.

$$\begin{aligned} y &= 5(x - 1) + 2 \\ &= \boxed{5x - 3}. \end{aligned}$$

5.

$$5(1) - 3 = 2.$$

Donc $A(1; 2)$ appartient à la tangente.

Exercice 9 – Plusieurs tangentes

1.

$$f(-1) = 2, \quad f'(-1) = 0.$$

2. En -1 :

$$\boxed{y = 2}.$$

3. En 0 :

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -3, \quad \boxed{y = -3x}.$$

4. En 1 :

$$f(1) = -2, \quad f'(1) = 0, \quad \boxed{y = -2}.$$

5. Les tangentes $y = 2$ et $y = -2$ sont horizontales, donc parallèles.

Exercice 10 – Tangente parallèle

1. La droite d a pour coefficient directeur 6.

2. Les droites parallèles ont le même coefficient directeur :

$$f'(a) = 6.$$

3.

$$2a - 4 = 6 \iff 2a = 10 \iff \boxed{a = 5}.$$

4.

$$f(5) = 25 - 20 + 5 = \boxed{10}.$$

5.

$$\begin{aligned} y &= 6(x - 5) + 10 \\ &= \boxed{6x - 20}. \end{aligned}$$

Partie 4 : Approximation linéaire

Exercice 11 – Approcher une racine carrée

1.

$$f(9) = \boxed{3}.$$

2.

$$f'(9) = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

3.

$$\boxed{y = 3 + \frac{1}{6}(x - 9)}.$$

4.

$$\sqrt{9,12} \approx 3 + \frac{0,12}{6} = \boxed{3,02}.$$

5.

$$\sqrt{9,12} \approx 3,019934.$$

L'approximation est très proche.

Exercice 12 – Approximation d'une fonction

1.

$$f(2) = \frac{1}{2}, \quad f'(2) = -\frac{1}{4}.$$

2.

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x - 2).$$

3.

$$\frac{1}{2,04} \approx \frac{1}{2} - \frac{0,04}{4} = \boxed{0,49}.$$

4. Avec $a = 2$ et $h = 0,04$:

$$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a) = 0,49.$$

5. Plus h est proche de 0, plus l'approximation locale est précise.

Partie 5 : Fonctions dérivées usuelles

Exercice 13 – Dérivées simples

1. $f'(x) = \boxed{2x}$

5. $p'(x) = \boxed{8x}$

2. $g'(x) = \boxed{3x^2}$

6. $q'(x) = \boxed{-9x^2}$

3. $h'(x) = \boxed{5}$

7. $r'(x) = \boxed{4x^3}$

4. $k'(x) = \boxed{0}$

8. $s'(x) = \boxed{-10x^4}$

Toutes ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 – Fonctions usuelles

1. $D_f = \mathbb{R}$:

$$\boxed{f'(x) = 2x}.$$

2. $D_g = \mathbb{R}$:

$$\boxed{g'(x) = 3x^2 - 2}.$$

3. $D_h = \mathbb{R}^*$:

$$\boxed{h'(x) = -\frac{1}{x^2}}.$$

4. $D_k = [0; +\infty[$. Dérivable sur $]0; +\infty[$:

$$\boxed{k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

5. $D_p = \mathbb{R}^*$:

$$\boxed{p'(x) = -\frac{3}{x^2}}.$$

6. $D_q = [0; +\infty[$. Dérivable sur $]0; +\infty[$:

$$\boxed{q'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}}}.$$

Exercice 15 – Puissances entières

1.

$$\boxed{f'(x) = 6x^5}$$

4.

$$\boxed{k'(x) = -3x^{-4}}$$

2.

$$\boxed{g'(x) = 8x^7}$$

5.

$$\boxed{p'(x) = 20x^4 - 6x^2}$$

3.

$$\boxed{h'(x) = -2x^{-3}}$$

6.

$$\boxed{q'(x) = -6x^{-3} + 5}$$

Pour h , k et q , on doit avoir $x \neq 0$.

Partie 6 : Opérations sur les fonctions dérivables

Exercice 16 – Dérivée d'une somme

1.

$$f'(x) = 6x + 5$$

2.

$$g'(x) = -6x^2 + 8x - 1$$

3.

$$h'(x) = 20x^3 - 6x$$

4.

$$k'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 7$$

5. Pour $x \neq 0$:

$$p'(x) = -\frac{2}{x^2} + 6x.$$

6. Pour $x > 0$:

$$q'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 2x.$$

Exercice 17 – Dérivée d'un produit

On utilise :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

1.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + 1) + 2x(x + 2) \\ &= 3x^2 + 4x + 1. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3(x^2 - 4) + 2x(3x - 1) \\ &= 9x^2 - 2x - 12. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x(x^3 + 2) + 3x^4 \\ &= 5x^4 + 4x. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} k'(x) &= 2x(2x^2 - 1) + 4x(x^2 + 3) \\ &= 8x^3 + 10x. \end{aligned}$$

5.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2.$$

Donc :

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 1.$$

6. On retrouve bien le même résultat.

Exercice 18 – Dérivée d'un quotient

On utilise :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

1. Pour $x \neq 2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-2) - (x+1)}{(x-2)^2} \\ &= \boxed{\frac{-3}{(x-2)^2}}. \end{aligned}$$

2. Pour $x \neq -1$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} \\ &= \boxed{\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}}. \end{aligned}$$

3. Sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2(x^2+1) - 2x(2x-3)}{(x^2+1)^2} \\ &= \boxed{\frac{-2x^2+6x+2}{(x^2+1)^2}}. \end{aligned}$$

4. Pour $x \neq -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{2x(2x+1) - 2(x^2-4)}{(2x+1)^2} \\ &= \boxed{\frac{2x^2+2x+8}{(2x+1)^2}}. \end{aligned}$$

Exercice 19 – Produit, quotient ou somme ?

1. Sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x^3-2x) + (2x+1)(3x^2-2) \\ &= \boxed{8x^3+3x^2-8x-2}. \end{aligned}$$

2. Pour $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(2x+3)(x-1) - (x^2+3x+1)}{(x-1)^2} \\ &= \boxed{\frac{x^2-2x-4}{(x-1)^2}}. \end{aligned}$$

3. Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} \\ &= \boxed{\frac{5}{2}x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

4. Sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3+1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \boxed{\frac{x^4+3x^2-2x}{(x^2+1)^2}}. \end{aligned}$$

5. Pour $x \neq 0$:

$$\boxed{p'(x) = -\frac{1}{x^2} + 3x^2 - 4}.$$

La fonction $h(x) = x^2\sqrt{x} = x^{5/2}$ est également dérivable à droite en 0, avec $h'(0) = 0$.

Partie 7 : Dérivabilité et valeur absolue

Exercice 20 – Fonction valeur absolue

1.

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

2. La courbe est formée de deux demi-droites se rejoignant en $(0; 0)$.

3. Pour $h > 0$:

$$\frac{|h|}{h} = \boxed{1}.$$

4. Pour $h < 0$:

$$\frac{|h|}{h} = \boxed{-1}.$$

5. Les résultats sont différents.

6. Les limites à gauche et à droite du taux de variation sont différentes :

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}.$$

7. La courbe possède un point anguleux en 0.

8.

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Partie 8 : Synthèse type bac

Exercice 21 – Le coût de production

$$C(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 100.$$

Partie A

1.

$$\boxed{C(0) = 100}.$$

Le coût fixe est de 10 000 €.

2.

$$\boxed{C(2) = 180, \quad C(5) = 225}.$$

3. Produire 500 objets coûte 22 500 €.

4.

$$\frac{C(5) - C(2)}{5 - 2} = \frac{45}{3} = \boxed{15}.$$

5. Le coût augmente en moyenne de 15 € par objet supplémentaire entre 200 et 500 objets.

Partie B

6.

$$\boxed{C'(x) = 3x^2 - 24x + 60}.$$

7.

$$C'(2) = 12 - 48 + 60 = \boxed{24}.$$

8.

$$\begin{aligned} y &= 24(x - 2) + 180 \\ &= \boxed{24x + 132}. \end{aligned}$$

9. Le coût marginal au voisinage de 200 objets est estimé à $\boxed{24 \text{ € par objet}}$.

Partie C

10.

$$C(2,1) \approx 180 + 0,1 \times 24 = \boxed{182,4}.$$

11.

$$\boxed{C(2,1) = 182,341}.$$

12. L'écart est :

$$182,4 - 182,341 = 0,059,$$

soit 5,90 €.

13. L'approximation permet une estimation rapide pour une faible variation de production.

Partie 9 : Synthèse type bac

Exercice 22 – Mouvement d'un mobile

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 2.$$

Partie A

1.

$$s(0) = 2, \quad s(1) = 6, \quad s(3) = 2.$$

2. À $t = 3$ s, le mobile est à 2 m de l'origine sur l'axe orienté.

3.

$$\frac{s(1) - s(0)}{1 - 0} = \boxed{4}.$$

4. La vitesse moyenne algébrique est de 4 m/s.

Partie B

5.

$$s'(t) = 3t^2 - 12t + 9.$$

6.

$$s'(0) = 9, \quad s'(1) = 0, \quad s'(3) = 0.$$

7. À $t = 0$, la vitesse algébrique est de 9 m/s. Elle est nulle aux instants 1 s et 3 s.

8.

$$s'(t) = 0 \iff 3(t-1)(t-3) = 0 \iff \boxed{t = 1 \text{ ou } t = 3}.$$

9. La vitesse est nulle à 1 s et 3 s.

10.

$$s'(t) = 3(t-1)(t-3).$$

Le signe est positif sur $[0; 1[$ et $]3; 5]$, négatif sur $]1; 3[$, et nul en 1 et 3.

11. Le mobile avance dans le sens positif sur $[0; 1[$ et $]3; 5]$, et dans le sens négatif sur $]1; 3[$.

Partie C

12.

$$s(2) = 4, \quad s'(2) = -3.$$

Donc :

$$y = -3(t-2) + 4 = \boxed{-3t + 10}.$$

13.

$$s(2,05) \approx 4 + 0,05(-3) = \boxed{3,85 \text{ m}}.$$

14.

$$s(2,05) = 3,850125 \text{ m}.$$

15. L'écart est :

$$\boxed{0,000125 \text{ m}}.$$

16. La vitesse instantanée algébrique $s'(t)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de position.