



Corrigé – Calcul littéral et équations

I. Réduire et développer

Exercice 1 – Réduire des expressions

Difficulté : ★ ★ ★

Compétence travaillée : Regrouper les termes de même nature.

On regroupe uniquement les termes de même nature.

- a) $3x + 5x = \boxed{8x}$.
- b) $7x - 2x + 4 = \boxed{5x + 4}$.
- c) $4x + 3 - 2x + 7 = \boxed{2x + 10}$.
- d) $5x^2 + 3x - 2x^2 + 4x = \boxed{3x^2 + 7x}$.
- e) $7x^2 - 5x + 2 - 3x^2 + 2x - 6 = \boxed{4x^2 - 3x - 4}$.
- f) $4a + 3b - 2a + 5b = \boxed{2a + 8b}$.

Exercice 2 – Supprimer les parenthèses

Difficulté : ★ ★ ★

Compétence travaillée : Gérer les signes devant des parenthèses.

Un signe moins devant des parenthèses change le signe de chacun des termes.

- a) $x + (2 + 3x) = x + 2 + 3x = \boxed{4x + 2}$.
- b) $x - (2 + 3x) = x - 2 - 3x = \boxed{-2x - 2}$.
- c) $-2x + (-4 + 5x) = -2x - 4 + 5x = \boxed{3x - 4}$.
- d) $-2x - (-4 + 5x) = -2x + 4 - 5x = \boxed{-7x + 4}$.

I. Réduire et développer (suite)

Exercice 3 – Distributivité simple

Difficulté : ★★

Compétence travaillée : Développer un produit et réduire.

a) $3(x + 5) = \boxed{3x + 15}$.

b) $-4(2x - 3) = \boxed{-8x + 12}$.

c) $5x(x - 2) = \boxed{5x^2 - 10x}$.

d) $3(x + 4) + 2x = 3x + 12 + 2x = \boxed{5x + 12}$.

e) $4(x - 2) - 2(x + 3) = 4x - 8 - 2x - 6 = \boxed{2x - 14}$.

f) $7 - 2(3x - 4) = 7 - 6x + 8 = \boxed{-6x + 15}$.

Exercice 4 – Double distributivité

Difficulté : ★★

Compétence travaillée : Développer le produit de deux expressions.

a) $(x + 3)(x + 7) = x^2 + 7x + 3x + 21 = \boxed{x^2 + 10x + 21}$.

b) $(2x - 5)(x + 4) = 2x^2 + 8x - 5x - 20 = \boxed{2x^2 + 3x - 20}$.

c) $(3x + 1)(2x - 5) = 6x^2 - 15x + 2x - 5 = \boxed{6x^2 - 13x - 5}$.

d) $(x - 3)(x + 4) = x^2 + 4x - 3x - 12 = \boxed{x^2 + x - 12}$.

e) $(2x - 3)(4x + 1) = 8x^2 + 2x - 12x - 3 = \boxed{8x^2 - 10x - 3}$.

f) $(5 - x)(x + 2) = 5x + 10 - x^2 - 2x = \boxed{-x^2 + 3x + 10}$.

Exercice 5 – Développements avec soustraction

Difficulté : ★★

Compétence travaillée : Enchaîner des développements sans erreur de signe.

a) $(x + 2)(3x - 5) - 4x(x + 1) = 3x^2 + x - 10 - 4x^2 - 4x$
 $= \boxed{-x^2 - 3x - 10}$.

b) $(2x - 3)(x + 4) - 3x(x - 2) = 2x^2 + 5x - 12 - 3x^2 + 6x$
 $= \boxed{-x^2 + 11x - 12}$.

c) $(3x + 1)(2x - 5) - 2x(x + 3) = 6x^2 - 13x - 5 - 2x^2 - 6x$
 $= \boxed{4x^2 - 19x - 5}$.

d) $(x - 4)(5x + 2) - 3x(2x - 1) = 5x^2 - 18x - 8 - 6x^2 + 3x$
 $= \boxed{-x^2 - 15x - 8}$.

II. Factoriser

Exercice 6 – Un facteur commun simple

Difficulté : ★★

Compétence travaillée : Mettre en évidence un facteur commun.

a) $20x - 10 = \boxed{10(2x - 1)}$.

d) $28x^2 + 21x = \boxed{7x(4x + 3)}$.

b) $15x + 25 = \boxed{5(3x + 5)}$.

e) $24x^2 - 16x = \boxed{8x(3x - 2)}$.

c) $18x^2 - 12x = \boxed{6x(3x - 2)}$.

f) $12x^3 + 8x^2 = \boxed{4x^2(3x + 2)}$.

Exercice 7 – Un facteur commun composé

Difficulté : ★★

Compétence travaillée : Repérer une expression commune à plusieurs termes.

a) $(x + 2)(3x - 1) + 4(x + 2) = (x + 2)[(3x - 1) + 4]$
 $= \boxed{(x + 2)(3x + 3)}$.

b) $(2x - 5)(x + 3) - 7(2x - 5) = (2x - 5)[(x + 3) - 7]$
 $= \boxed{(2x - 5)(x - 4)}$.

c) $(3x - 3)^2 + 5(3x - 3) = (3x - 3)[(3x - 3) + 5]$
 $= \boxed{(3x - 3)(3x + 2)}$.

d) $(x - 6)(4x + 3) - 2x(x - 6) = (x - 6)[(4x + 3) - 2x]$
 $= \boxed{(x - 6)(2x + 3)}$.

Exercice 8 – Bilan : choisir la bonne opération

Difficulté : ★★

Compétence travaillée : Distinguer développement et factorisation.

a) $A = 3x - 12 + 2x^2 + 5x + 2 = \boxed{2x^2 + 8x - 10}$.

b) $B = 3x^2 + 13x - 10 - 4x^2 + 4x = \boxed{-x^2 + 17x - 10}$.

c) $C = 24x^2 - 16x = \boxed{8x(3x - 2)}$.

d) $D = (x + 4)[(3x - 2) + 6] = \boxed{(x + 4)(3x + 4)}$.

III. Identités remarquables

Exercice 9 – Reconnaître et développer

Difficulté : ★★

Compétence travaillée : Utiliser les trois identités remarquables.

On utilise

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

- a) $(x + 5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 25 = \boxed{x^2 + 10x + 25}$.
- b) $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 2 \times 2x \times 3 + 9 = \boxed{4x^2 - 12x + 9}$.
- c) $(x + 7)(x - 7) = \boxed{x^2 - 49}$.
- d) $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 2 \times 3x \times 2 + 4 = \boxed{9x^2 + 12x + 4}$.
- e) $(4x - 1)^2 = \boxed{16x^2 - 8x + 1}$.
- f) $(5 - 2x)^2 = 25 - 20x + 4x^2 = \boxed{4x^2 - 20x + 25}$.
- g) $(3x + 4)(3x - 4) = \boxed{9x^2 - 16}$.
- h) $(2x + 5)^2 = \boxed{4x^2 + 20x + 25}$.

Exercice 10 – Combiner plusieurs identités

Difficulté : ★★★

Compétence travaillée : Développer une expression comportant plusieurs produits.

- a) $(2x - 3)^2 + (x + 5)(3 - x) = 4x^2 - 12x + 9 - x^2 - 2x + 15$
 $= \boxed{3x^2 - 14x + 24}$.
- b) $2(x + 3) - (2x + 3)(2x - 3) = 2x + 6 - (4x^2 - 9)$
 $= \boxed{-4x^2 + 2x + 15}$.
- c) $(4x - 1)^2 - (2 - 5x)(2 + 5x) = 16x^2 - 8x + 1 - (4 - 25x^2)$
 $= \boxed{41x^2 - 8x - 3}$.
- d) $(x - 2)^2 - (2x + 3)^2 = x^2 - 4x + 4 - (4x^2 + 12x + 9)$
 $= \boxed{-3x^2 - 16x - 5}$.

III. Identités remarquables (suite)

Exercice 11 – Reconnaître une forme à factoriser

Difficulté : ★★

Compétence travaillée : Lire une identité remarquable dans le sens inverse.

- a) $x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 = \boxed{(x - 1)^2}$.
- b) $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = \boxed{(2x + 3)^2}$.
- c) $9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2 = \boxed{(3x - 2)(3x + 2)}$.
- d) $1 - 49x^2 = 1^2 - (7x)^2 = \boxed{(1 - 7x)(1 + 7x)}$.
- e) $4x^2 + 16x + 16 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 4 + 4^2 = \boxed{(2x + 4)^2}$.
- f) $1 + 25x^2 - 10x = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 1 + 1^2 = \boxed{(5x - 1)^2}$.
- g) $9x^2 - 81 = (3x)^2 - 9^2 = \boxed{(3x - 9)(3x + 9)}$.
- h) $3 - x^2 = (\sqrt{3})^2 - x^2 = \boxed{(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)}$.

Exercice 12 – Différences de deux carrés

Difficulté : ★★

Compétence travaillée : Identifier les deux carrés avant de factoriser.

- a) $(x + 4)^2 - 9 = [(x + 4) - 3][(x + 4) + 3]$
 $= \boxed{(x + 1)(x + 7)}$.
- b) $16 - (3 + 7x)^2 = [4 - (3 + 7x)][4 + (3 + 7x)]$
 $= \boxed{(1 - 7x)(7 + 7x)}$.
- c) $(6x + 2)^2 - (1 + 4x)^2 = [(6x + 2) - (1 + 4x)][(6x + 2) + (1 + 4x)]$
 $= \boxed{(2x + 1)(10x + 3)}$.
- d) $4x^2 - (2 + x)^2 = [2x - (2 + x)][2x + (2 + x)]$
 $= \boxed{(x - 2)(3x + 2)}$.

Exercice 13 – Démontrer une identité

Difficulté : ★★

Compétence travaillée : Prouver une égalité pour tout réel.

Développons chaque membre séparément. Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned}(3 - 2x)^2 - (x + 5)^2 &= 9 - 12x + 4x^2 - (x^2 + 10x + 25) \\ &= 3x^2 - 22x - 16,\end{aligned}$$

et

$$x(3x - 22) - 16 = 3x^2 - 22x - 16.$$

Les deux membres ont la même forme développée : **l'égalité est donc vraie pour tout réel x .**

IV. Choisir une forme adaptée

Exercice 14 – Développer, factoriser, calculer

Difficulté : ★★

Compétence travaillée : Choisir une écriture adaptée à la question.

1) $A(x) = 4x + 4 + 3x^2 + 4x + 1 = \boxed{3x^2 + 8x + 5}$.

2) $A(x) = (x + 1)[4 + (3x + 1)] = \boxed{(x + 1)(3x + 5)}$.

3) La forme factorisée donne

$$\boxed{A(-1) = 0},$$

$$\boxed{A\left(-\frac{5}{3}\right) = 0}.$$

La forme développée donne $\boxed{A(0) = 5}$.

4) Dans $\mathbb{R}$:

$$A(x) = 0 \iff (x + 1)(3x + 5) = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = -\frac{5}{3}.$$

Donc $\boxed{S = \left\{-\frac{5}{3}; -1\right\}}$. Pour la seconde équation, on utilise la forme développée :

$$A(x) = 5 \iff 3x^2 + 8x = 0 \iff x(3x + 8) = 0.$$

Ainsi $\boxed{S = \left\{-\frac{8}{3}; 0\right\}}$.

Exercice 15 – Deux écritures pour une expression

Difficulté : ★★

Compétence travaillée : Passer de la forme développée à la forme factorisée.

1) $B(x) = x^2 + 8x + 16 - 16 = \boxed{x^2 + 8x}$.

2) $B(x) = [(x + 4) - 4][(x + 4) + 4] = \boxed{x(x + 8)}$.

3) La forme factorisée donne $\boxed{B(0) = 0}$ et $\boxed{B(-8) = 0}$.

4) Dans $\mathbb{R}$:

$$B(x) = 0 \iff x(x + 8) = 0, \quad \boxed{S = \{-8; 0\}}.$$

Pour la seconde équation, on utilise la forme initiale :

$$B(x) = -16 \iff (x + 4)^2 = 0 \iff x = -4, \quad \boxed{S = \{-4\}}.$$

V. Fractions et manipulation de formules

Exercice 16 – Expressions fractionnaires

Difficulté : ★★

Compétence travaillée : Réduire au même dénominateur et gérer les signes.

a) $\frac{3x}{5} + \frac{2x}{5} = \frac{5x}{5} = \boxed{x}$.

b) $\frac{x+3}{2} + \frac{x-1}{2} = \frac{2x+2}{2} = \boxed{x+1}$.

c) $\frac{5x+2}{3} - \frac{2x-1}{3} = \frac{5x+2-2x+1}{3} = \boxed{x+1}$.

d) $\frac{x+5}{2} + 3x = \frac{x+5+6x}{2} = \boxed{\frac{7x+5}{2}}$.

e) $2(x-1) - \frac{x+3}{2} = \frac{4x-4-x-3}{2} = \boxed{\frac{3x-7}{2}}$.

f) $\frac{2x-1}{3} - \frac{x+2}{4} = \frac{4(2x-1)-3(x+2)}{12} = \boxed{\frac{5x-10}{12}}$.

Exercice 17 – Isoler une variable

Difficulté : ★★

Compétence travaillée : Transformer une formule en précisant les conditions.

1) $P = 2L + 2\ell \iff 2L = P - 2\ell$, donc $\boxed{L = \frac{P-2\ell}{2} = \frac{P}{2} - \ell}$.

2) $A = \frac{bh}{2} \iff 2A = bh$. Si $b \neq 0$, $\boxed{h = \frac{2A}{b}}$.

3) Comme $t \neq 0$, $v = \frac{d}{t} \iff vt = d$, donc $\boxed{d = vt}$. Si $v \neq 0$, on obtient aussi $\boxed{t = \frac{d}{v}}$. La condition initiale $t \neq 0$ reste à respecter.

4) $A = \frac{(B+b)h}{2} \iff 2A = (B+b)h$. Si $B+b \neq 0$, $\boxed{h = \frac{2A}{B+b}}$.

5) $h = \frac{2 \times 45}{12+6} = \frac{90}{18} = \boxed{5}$.

VI. Résoudre des équations

Exercice 18 – Équations du premier degré

Difficulté : ★ ★ ★

Compétence travaillée : Isoler l'inconnue après réduction.

Toutes les équations sont résolues dans $\mathbb{R}$.

a) $-6 + 5x = 12x + 2 \iff -7x = 8$, donc $S = \left\{-\frac{8}{7}\right\}$.

b) $4x + 8 = 5x + 3 + x \iff 4x + 8 = 6x + 3 \iff 2x = 5$, donc $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

c) $9x + 13 = 5(3x - 1) \iff 9x + 13 = 15x - 5 \iff 6x = 18$, donc $S = \{3\}$.

d) $5x + 9 - 2x = -3x + 21 \iff 3x + 9 = -3x + 21 \iff 6x = 12$, donc $S = \{2\}$.

e) $3(4x + 8) = 9 - 5x \iff 12x + 24 = 9 - 5x \iff 17x = -15$, donc $S = \left\{-\frac{15}{17}\right\}$.

f) $-4x + 12 = -10 - 10x - 14 \iff -4x + 12 = -10x - 24 \iff 6x = -36$, donc $S = \{-6\}$.

Exercice 19 – Équations avec des fractions

Difficulté : ★ ★ ★

Compétence travaillée : Supprimer les dénominateurs numériques.

On multiplie les deux membres par un dénominateur commun non nul.

a) $\frac{x+2}{4} = 3 \iff x+2 = 12 \iff x = 10$, donc $S = \{10\}$.

b) $\frac{2x-1}{3} = 5 \iff 2x-1 = 15 \iff x = 8$, donc $S = \{8\}$.

c) $\frac{x+1}{2} = \frac{x+7}{4} \iff 2(x+1) = x+7 \iff x = 5$, donc $S = \{5\}$.

d) En multipliant par 12 :

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{3} - \frac{x+2}{4} &= 1 \iff 4(2x-1) - 3(x+2) = 12 \\ &\iff 8x - 4 - 3x - 6 = 12 \\ &\iff 5x = 22.\end{aligned}$$

Donc $S = \left\{\frac{22}{5}\right\}$.

VI. Résoudre des équations (suite)

Exercice 20 – Produits nuls

Difficulté : ★★

Compétence travaillée : Appliquer la propriété du produit nul.

Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.

a) $(x+5)(3-x)=0 \iff x=-5 \text{ ou } x=3$, donc $S = \{-5; 3\}$.

b) $(x-8)(3x-4)=0 \iff x=8 \text{ ou } x=\frac{4}{3}$, donc $S = \left\{\frac{4}{3}; 8\right\}$.

c) $(2x+3)(1-x)=0 \iff x=-\frac{3}{2} \text{ ou } x=1$, donc $S = \left\{-\frac{3}{2}; 1\right\}$.

d) $(5x+5)(8+4x)=0 \iff x=-1 \text{ ou } x=-2$, donc $S = \{-2; -1\}$.

e) $(3x+6)(5x-15)=0 \iff x=-2 \text{ ou } x=3$, donc $S = \{-2; 3\}$.

f) $(x-4)(1-3x)=0 \iff x=4 \text{ ou } x=\frac{1}{3}$, donc $S = \left\{\frac{1}{3}; 4\right\}$.

Exercice 21 – Factoriser avant de résoudre

Difficulté : ★★

Compétence travaillée : Faire apparaître un produit nul.

a) $2x^2-3x=0 \iff x(2x-3)=0$, donc $S = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$.

b) $x+5x^2=0 \iff x(1+5x)=0$, donc $S = \left\{-\frac{1}{5}; 0\right\}$.

c) $2x^2+7x=0 \iff x(2x+7)=0$, donc $S = \left\{-\frac{7}{2}; 0\right\}$.

d) $x^2-25=0 \iff (x-5)(x+5)=0$, donc $S = \{-5; 5\}$.

e)
$$(4x-3)(5+2x) + (3+x)(5+2x) = 0 \iff (5+2x)[(4x-3) + (3+x)] = 0$$
$$\iff (5+2x)(5x) = 0.$$

Donc $S = \left\{-\frac{5}{2}; 0\right\}$.

f)
$$(x-9)(2x-3) - x(x-9) = 0 \iff (x-9)[(2x-3) - x] = 0 \iff (x-9)(x-3) = 0.$$

Donc $S = \{3; 9\}$.

g)
$$(4-3x)(6x-1) - (4-3x)(4x-1) = 0 \iff (4-3x)[(6x-1) - (4x-1)] = 0$$
$$\iff (4-3x)(2x) = 0.$$

Donc $S = \left\{0; \frac{4}{3}\right\}$.

VI. Résoudre des équations (suite)

Exercice 22 – Équations faisant intervenir un carré

Difficulté : ★★★

Compétence travaillée : Distinguer les cas et reconnaître un carré parfait.

Un carré réel est positif ou nul. Pour $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ a deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

a) $x^2 = 81$, donc $S = \{-9; 9\}$.

b) $x^2 = -7$ est impossible dans $\mathbb{R}$, donc $S = \emptyset$.

c) $x^2 = 15$, donc $S = \{-\sqrt{15}; \sqrt{15}\}$.

d) $3x^2 = 48 \iff x^2 = 16$, donc $S = \{-4; 4\}$.

e) $2x^2 + 20 = 0 \iff x^2 = -10$, donc $S = \emptyset$.

f) $4x^2 - 2 = 1 \iff x^2 = \frac{3}{4}$, donc $S = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

g) $x^2 + 6x + 9 = 0 \iff (x + 3)^2 = 0$, donc $S = \{-3\}$.

h) $36x^2 - 12x + 22 = 21 \iff 36x^2 - 12x + 1 = 0 \iff (6x - 1)^2 = 0$, donc $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$.

Exercice 23 – Quotients nuls

Difficulté : ★★★

Compétence travaillée : Exclure les valeurs interdites avant de résoudre.

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul.

a) Valeur interdite : 6. $5x - 10 = 0 \iff x = 2$. Comme $2 \neq 6$, $S = \{2\}$.

b) Valeur interdite : $\frac{2}{3}$. $4 - x = 0 \iff x = 4$. La valeur est autorisée, donc $S = \{4\}$.

c) Valeur interdite : 5. $3x - 12 = 0 \iff x = 4$. La valeur est autorisée, donc $S = \{4\}$.

d) Valeur interdite : 9. $(x - 4)(2x - 6) = 0 \iff x = 4$ ou $x = 3$. Les deux valeurs sont autorisées : $S = \{3; 4\}$.

e) Valeur interdite : $\frac{4}{3}$. $x(4x + 2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$. Donc $S = \left\{-\frac{1}{2}; 0\right\}$.

f) Valeur interdite : 3. $(x - 3)(x + 2) = 0$ donne $x = 3$ ou $x = -2$. On exclut 3 : $S = \{-2\}$.

VI. Résoudre des équations (suite)

Exercice 24 – Équations avec des dénominateurs littéraux

Difficulté : ★★★

Compétence travaillée : Résoudre sur l'ensemble des valeurs autorisées.

a) Pour $x \neq 6$, on multiplie par $x - 6$:

$$\frac{2x-1}{x-6} = \frac{x}{x-6} \iff 2x-1 = x \iff x = 1.$$

Comme $1 \neq 6$, $\boxed{S = \{1\}}$.

b) Pour $x \neq 3$, on multiplie par $2x - 6$:

$$\frac{5x-2}{2x-6} = \frac{x-3}{2x-6} \iff 5x-2 = x-3 \iff 4x = -1.$$

La valeur obtenue est autorisée : $\boxed{S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}}$.

c) Les valeurs interdites sont 3 et $\frac{1}{2}$. Sur l'ensemble autorisé, on multiplie par $(x-3)(2x-1)$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-3} + \frac{5}{2x-1} = 0 &\iff 2(2x-1) + 5(x-3) = 0 \\ &\iff 4x-2+5x-15 = 0 \\ &\iff 9x = 17. \end{aligned}$$

Comme $\frac{17}{9}$ n'est pas une valeur interdite, $\boxed{S = \left\{\frac{17}{9}\right\}}$.

d) Pour $x \neq 2$:

$$\frac{x+1}{x-2} = 2 \iff x+1 = 2(x-2) \iff x = 5.$$

Donc $\boxed{S = \{5\}}$.

VII. Mettre un problème en équation

Exercice 25 – Programmes de calcul

Difficulté : ★★★

Compétence travaillée : Traduire des opérations puis comparer deux expressions.

1) Les résultats sont $\boxed{A(x) = 3(x+5) = 3x+15}$ et $\boxed{B(x) = 5x-7}$.

2)

$$A(x) = B(x) \iff 3x+15 = 5x-7 \iff 2x = 22 \iff x = 11.$$

Le nombre de départ est donc $\boxed{11}$.

3) Programme A : $(11+5) \times 3 = 48$. Programme B : $5 \times 11 - 7 = 48$. Les deux résultats sont bien égaux.

Compétence travaillée : Modéliser une recette avec une seule inconnue.

1) Le nombre de billets enfants est $\boxed{180 - x}$.

2) La recette est $12x + 7(180 - x)$, d'où

$$12x + 7(180 - x) = 1660.$$

3)

$$12x + 1260 - 7x = 1660 \iff 5x = 400 \iff x = 80.$$

Il y a $\boxed{80 \text{ billets adultes et } 100 \text{ billets enfants}}$.

4) $80 + 100 = 180$ et $12 \times 80 + 7 \times 100 = 960 + 700 = 1660$. Les deux conditions sont vérifiées.

VII. Mettre un problème en équation (suite)

Exercice 27 – Deux carrés

Difficulté : ★★★

Compétence travaillée : Traduire une différence d'aires.

1) On note $x > 0$ le côté du petit carré. Les aires sont x^2 et $(x + 2)^2$, en cm^2 .

2)

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 - x^2 = 24 &\iff x^2 + 4x + 4 - x^2 = 24 \\ &\iff 4x = 20 \\ &\iff x = 5.\end{aligned}$$

3) Les côtés mesurent $\boxed{5 \text{ cm et } 7 \text{ cm}}$. Vérification : $7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24 \text{ cm}^2$.

Exercice 28 – Un enclos contre un mur

Difficulté : ★★★

Compétence travaillée : Tenir compte des côtés réellement clôturés.

1) Trois côtés sont grillagés, donc $2x + L = 12$: $\boxed{L = 12 - 2x}$. Les dimensions sont strictement positives : $x > 0$ et $12 - 2x > 0$, soit $\boxed{0 < x < 6}$.

2) $A(x) = xL = x(12 - 2x) = \boxed{-2x^2 + 12x}$.

3) L'aire demandée conduit à

$$-2x^2 + 12x = 16 \iff -2x^2 + 12x - 16 = 0.$$

Or $-2(x - 2)(x - 4) = -2(x^2 - 6x + 8) = -2x^2 + 12x - 16$. Ainsi

$$-2(x - 2)(x - 4) = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = 4.$$

Les deux valeurs appartiennent à $]0; 6[$.

$$\boxed{x = 2 \text{ m, } L = 8 \text{ m}} \quad \text{ou} \quad \boxed{x = 4 \text{ m, } L = 4 \text{ m}}.$$

Vérification : $2 \times 2 + 8 = 12$, $2 \times 4 + 4 = 12$, et les deux aires valent 16 m^2 .

4)

$$18 - 2(x - 3)^2 = 18 - 2(x^2 - 6x + 9) = -2x^2 + 12x = A(x).$$

Comme $(x - 3)^2 \geq 0$, on a $A(x) \leq 18$. **Une aire de 20 m^2 est impossible.** L'aire maximale 18 m^2 est atteinte pour $x = 3$ et $L = 6$.

VII. Mettre un problème en équation (suite)

Exercice 29 – Une aire sous plusieurs formes

Difficulté : ★★★

Compétence travaillée : Utiliser une factorisation dans un problème géométrique.

1) On retranche l'aire du rectangle $OHPM$ à celle du carré :

$$\mathcal{A}(x) = (2x - 3)^2 - (2x - 3)(x + 1).$$

2) D'une part,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= 4x^2 - 12x + 9 - (2x^2 - x - 3) \\ &= \boxed{2x^2 - 11x + 12}.\end{aligned}$$

D'autre part, on met le facteur commun $2x - 3$ en évidence :

$$\mathcal{A}(x) = (2x - 3)[(2x - 3) - (x + 1)] = \boxed{(2x - 3)(x - 4)}.$$

3)

$$(2x - 3)(x - 4) = 0 \iff x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = 4.$$

La condition $x \geq 4$ exclut $\frac{3}{2}$. Seule $\boxed{x = 4}$ convient : le rectangle est alors aplati.

VIII. En route vers la spécialité maths

Exercice 30 – Une factorisation bien cachée

Difficulté : ★★★

Compétence travaillée : Repérer des facteurs opposés et choisir une stratégie.

1) Par différence de deux carrés,

$$\begin{aligned}(2x - 1)^2 - (x + 3)^2 &= [(2x - 1) - (x + 3)][(2x - 1) + (x + 3)] \\ &= \boxed{(x - 4)(3x + 2)}.\end{aligned}$$

2) Comme $1 - 2x = -(2x - 1)$,

$$\begin{aligned}F(x) &= (x - 4)(3x + 2) + (1 - 2x)(x - 4) \\ &= (x - 4)[(3x + 2) + (1 - 2x)] \\ &= \boxed{(x - 4)(x + 3)}.\end{aligned}$$

3) En développant l'expression initiale,

$$\begin{aligned}F(x) &= 4x^2 - 4x + 1 - (x^2 + 6x + 9) - 2x^2 + 9x - 4 \\ &= \boxed{x^2 - x - 12}.\end{aligned}$$

On retrouve bien $(x - 4)(x + 3) = x^2 - x - 12$.

4) $F(x) = 0 \iff (x - 4)(x + 3) = 0$, donc $\boxed{S = \{-3; 4\}}$. Pour la seconde équation :

$$F(x) = -12 \iff x^2 - x = 0 \iff x(x - 1) = 0, \quad \boxed{S = \{0; 1\}}.$$

VIII. En route vers la spécialité maths (suite)

Exercice 31 – Simplifier sans oublier les interdits

Difficulté : ★★★

Compétence travaillée : Factoriser avec une identité remarquable et conserver les valeurs interdites.

1) $(x-3)(x+2) = 0$ pour $x = 3$ ou $x = -2$. Donc $D_G = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$.

2) $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$.

3) Pour $x \in D_G$, le facteur $x-3$ est non nul :

$$G(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}.$$

La simplification ne change pas les valeurs interdites.

4) Toutes les transformations ci-dessous sont faites sur D_G .

— $G(x) = 0 \iff x+3 = 0 \iff x = -3$. Cette valeur est autorisée : $S = \{-3\}$.

— $G(x) = 1 \iff x+3 = x+2 \iff 3 = 2$. C'est impossible : $S = \emptyset$.

—

$$G(x) = \frac{6}{5} \iff 5(x+3) = 6(x+2) \iff 5x+15 = 6x+12 \iff x = 3.$$

Mais $3 \notin D_G$, donc $S = \emptyset$.

5) $G(3)$ n'existe pas car le dénominateur initial est nul. La valeur $\frac{6}{5}$ est celle de l'expression simplifiée en 3, mais cette simplification n'est valable que pour $x \neq 3$ et $x \neq -2$.

Exercice 32 – Peut-on diviser par l'inconnue ?

Difficulté : ★★★

Compétence travaillée : Repérer une transformation qui fait perdre une solution.

1) Pour $x = 7$, $7(7-5) = 14 = 2 \times 7$: 7 est solution.

2) Pour $x = 0$, $0(0-5) = 0 = 2 \times 0$: 0 est aussi solution.

3) Diviser par x exige $x \neq 0$. L'élève a donc perdu la solution 0.

4)

$$x(x-5) = 2x \iff x(x-5) - 2x = 0 \iff x(x-7) = 0.$$

D'où $S = \{0; 7\}$.

5) Pour la première équation :

$$\begin{aligned}(x+2)(3x-1) &= 5(x+2) \iff (x+2)[(3x-1)-5] = 0 \\ &\iff (x+2)(3x-6) = 0.\end{aligned}$$

Donc $S = \{-2; 2\}$. Pour la seconde :

$$\begin{aligned}(2x-1)^2 &= (2x-1)(x+4) \iff (2x-1)[(2x-1)-(x+4)] = 0 \\ &\iff (2x-1)(x-5) = 0.\end{aligned}$$

Donc $S = \left\{\frac{1}{2}; 5\right\}$.

VIII. En route vers la spécialité maths (suite)

Exercice 33 – Deux factorisations successives

Difficulté : ★★★

Compétence travaillée : Combiner une différence de carrés et un facteur commun.

1)

$$\begin{aligned}H(x) &= [(3x+1) - (x-5)][(3x+1) + (x-5)] \\&= \boxed{(2x+6)(4x-4)}.\end{aligned}$$

2)

$$H(x) = 9x^2 + 6x + 1 - (x^2 - 10x + 25) = \boxed{8x^2 + 16x - 24}.$$

3) $H(x) = 0 \iff (2x+6)(4x-4) = 0$, donc $\boxed{S = \{-3; 1\}}$. Pour la seconde équation :

$$H(x) = -24 \iff 8x^2 + 16x = 0 \iff 8x(x+2) = 0, \quad \boxed{S = \{-2; 0\}}.$$

4)

$$\begin{aligned}K(x) &= (2x+6)(4x-4) - (2x+6)(x+1) \\&= (2x+6)[(4x-4) - (x+1)] \\&= \boxed{(2x+6)(3x-5)}.\end{aligned}$$

5) $K(x) = 0 \iff x = -3$ ou $x = \frac{5}{3}$, donc $\boxed{S = \left\{-3; \frac{5}{3}\right\}}$.

Exercice 34 – Un maximum sans dérivée

Difficulté : ★★★

Compétence travaillée : Choisir une forme permettant de comparer des aires.

1) Si y est l'autre côté, $2x + 2y = 20$, donc $\boxed{y = 10 - x}$. Les deux côtés sont strictement positifs, d'où $\boxed{0 < x < 10}$.

2) $A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$ et

$$25 - (x-5)^2 = 25 - (x^2 - 10x + 25) = 10x - x^2.$$

Donc $\boxed{A(x) = 25 - (x-5)^2}$.

3) Comme $(x-5)^2 \geq 0$, on a $A(x) \leq 25$. L'égalité a lieu si et seulement si $x = 5$. L'aire maximale est $\boxed{25 \text{ cm}^2}$, pour un carré de $\boxed{5 \text{ cm de côté}}$.

4)

$$A(x) = 21 \iff 25 - (x-5)^2 = 21 \iff (x-5)^2 = 4 \iff x = 3 \text{ ou } x = 7.$$

Les deux valeurs sont autorisées. Les dimensions sont $\boxed{3 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}}$. Les deux solutions correspondent au même rectangle, avec les côtés échangés.

5) Puisque $A(x) \leq 25$, une aire de 26 cm^2 est impossible.

VIII. En route vers la spécialité maths (suite)

Exercice 35 – Défi : une identité et des entiers

Difficulté : ★★★

Compétence travaillée : Utiliser le calcul littéral pour démontrer une propriété.

- 1)
- $$(n+1)^2 - (n-1)^2 = n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 2n + 1) = \boxed{4n}.$$
- 2) Deux entiers de même parité séparés de 2 s'écrivent $n-1$ et $n+1$, avec n entier. La différence du carré du plus grand et du carré du plus petit est $4n$, donc un multiple de 4. L'identité précédente reste valable pour tout entier n .
- 3) La condition donne $4n = 120$, donc $n = 30$. Les nombres sont $\boxed{29 \text{ et } 31}$, tous deux impairs. Vérification : $31^2 - 29^2 = 961 - 841 = 120$.
- 4) Pour deux entiers pairs consécutifs, le nombre situé au milieu est impair. Or la condition impose $n = 30$, qui est pair. **Il n'existe donc pas de paire d'entiers naturels pairs consécutifs répondant à la condition.**

Retrouvez les cours, exercices et corrections sur
cestcompliquelesmaths.fr