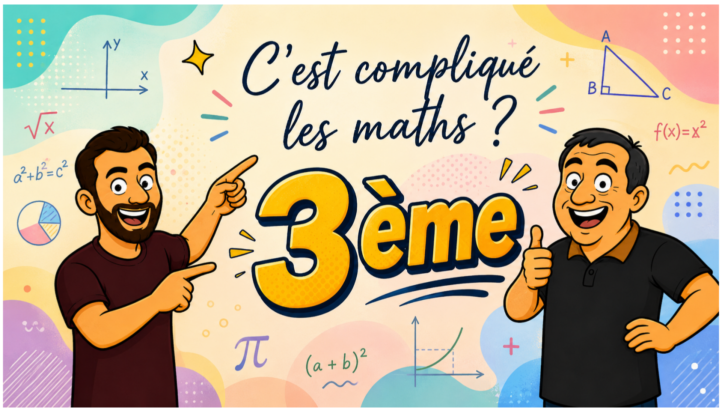



# Cours : Fonctions affines

## 1) Reconnaître et utiliser une fonction affine

**Définition**

Une **fonction affine** est une fonction qui, à tout nombre $x$, associe le nombre :

$$mx + p$$

où $m$ et $p$ sont deux nombres fixés.
Si on désigne cette fonction par $f$, on peut écrire :

$$f : x \longmapsto mx + p$$

ou :

$$\boxed{f(x) = mx + p}$$

**Exemples**

La fonction définie par :

$$f(x) = 2x + 1$$

est une fonction affine avec :

$$m = 2 \qquad \text{et} \qquad p = 1$$

La fonction définie par :

$$g(x) = 0{,}5x - 3$$

est une fonction affine avec :

$$m = 0{,}5 \qquad \text{et} \qquad p = -3$$

**Propriété**

La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite**.
Réciproquement, si la représentation graphique d'une fonction est une droite, alors cette fonction est affine.

**Méthode**

Pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine, il suffit de déterminer deux points de la droite :

1- On choisit deux valeurs de $x$.

2- On calcule leurs images.

3- On place les deux points obtenus dans un repère.

4- On trace la droite passant par ces deux points.

**Exemple**

On considère la fonction affine :

$$f(x) = -0{,}5x + 1$$

On choisit deux valeurs de $x$ :

| $x$ | 0 | 4 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | $-1$ |
| Point | $A$ | $B$ |

En effet :

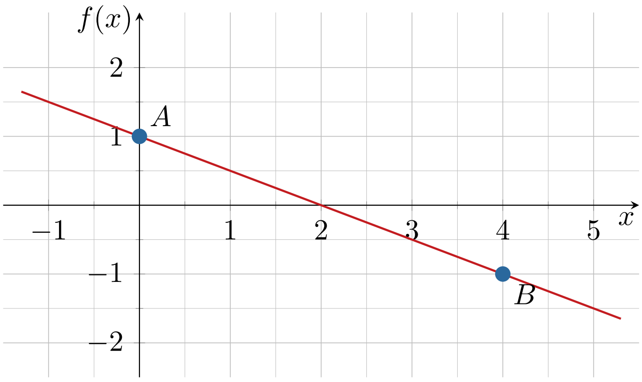
$$f(0) = -0{,}5 \times 0 + 1 = 1$$

et :

$$f(4) = -0{,}5 \times 4 + 1 = -2 + 1 = -1$$

La droite passe donc par les points :

$$A(0\,;1) \qquad \text{et} \qquad B(4\,;-1)$$




## 2) Interpréter les paramètres d'une fonction affine

**Définitions**

On considère la fonction affine :

$$f(x) = mx + p$$

et on note $d$ sa représentation graphique.
Le nombre $m$ est appelé le **coefficient directeur** ou la **pente** de la droite $d$.
Le nombre $p$ est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite $d$.

**Exemple**

On considère la fonction affine :

$$f(x) = -3x + 4$$

On compare son expression à la forme générale :

$$f(x) = mx + p$$

On peut écrire :

$$f(x) = \underbrace{-3}_{m}\,x + \underbrace{4}_{p}$$

On identifie donc :

$$\boxed{m = -3}$$

Le nombre $m$ est la **pente**, également appelée le **coefficient directeur** de la droite.
Puis :

$$\boxed{p = 4}$$

Le nombre $p$ est l'**ordonnée à l'origine** de la droite.
Ainsi, la droite coupe l'axe des ordonnées au point :

$$(0\,;4)$$

Comme $m = -3 < 0$, la droite est décroissante.

**Propriétés**

Le coefficient directeur $m$ indique la variation de l'ordonnée lorsque l'abscisse augmente de 1.
Ainsi, en restant sur la droite :

$$\boxed{\text{si } x \text{ augmente de } 1, \text{ alors } y \text{ augmente de } m}$$

L'ordonnée à l'origine $p$ est l'ordonnée du point où la droite coupe l'axe des ordonnées.
La droite passe donc toujours par le point :

$$\boxed{(0\,;p)}$$

**Remarque**

Le signe du coefficient directeur renseigne sur le sens de variation de la fonction :

- si $m > 0$, la fonction est croissante ;
- si $m < 0$, la fonction est décroissante ;
- si $m = 0$, la fonction est constante.

**Exemple**

On considère la fonction :

$$f(x) = 2x - 1$$

On identifie :

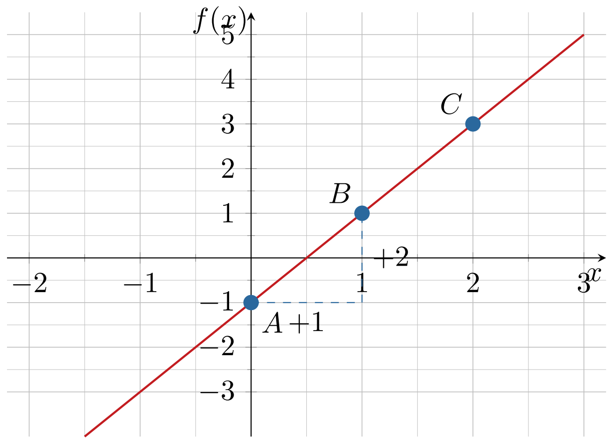
$$\boxed{m = 2} \qquad \text{et} \qquad \boxed{p = -1}$$

Le nombre $m = 2$ est la pente ou le coefficient directeur de la droite.
Le nombre $p = -1$ est l'ordonnée à l'origine.
Comme $p = -1$, la droite coupe l'axe des ordonnées au point :

$$A(0\,;-1)$$

Comme $m = 2$, lorsque l'abscisse augmente de 1, l'ordonnée augmente de 2.
On obtient donc :

$$B(1\,;1) \qquad \text{puis} \qquad C(2\,;3)$$




## 3) Reconnaître et utiliser une fonction linéaire

**Définition**

Une **fonction linéaire** de coefficient $m$ est une fonction qui, à tout nombre $x$, associe le nombre :

$$mx$$

Si cette fonction est désignée par $f$, on peut écrire :

$$f : x \longmapsto mx$$

ou :

$$\boxed{f(x) = mx}$$

**Remarque**

Une fonction linéaire est un cas particulier de fonction affine pour lequel :

$$p = 0$$

**Exemple**

La fonction linéaire de coefficient 5 est définie par :

$$f(x) = 5x$$

Dans cette expression :

$$m = 5 \qquad \text{et} \qquad p = 0$$

L'image d'un nombre $x$ par cette fonction est donc $5x$.
Par exemple :

$$f(3) = 5 \times 3 = 15$$

**Propriété**

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'**origine du repère**. Réciproquement, si la représentation graphique d'une fonction est une droite passant par l'origine, alors cette fonction est linéaire.

**Méthode**

Pour tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire, il suffit de placer :

- l'origine du repère $O(0\,;0)$ ;
- un second point obtenu en choisissant une valeur non nulle de $x$ et en calculant son image.

**Exemple**

On considère la fonction linéaire :

$$f(x) = 2x$$

Sa représentation graphique passe par l'origine :

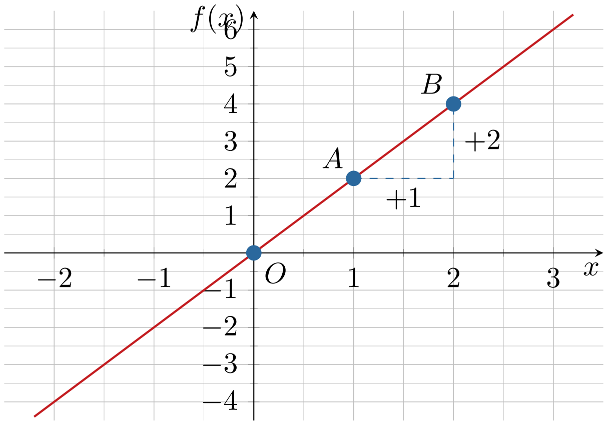
$$O(0\,;0)$$

On choisit $x = 1$ :

$$f(1) = 2 \times 1 = 2$$

La droite passe donc également par le point :

$$A(1\,;2)$$



## 4) Modéliser une situation de proportionnalité

**Propriété**

Une situation de proportionnalité de coefficient $m$ peut être modélisée par une fonction linéaire de coefficient $m$ :

$$\boxed{f(x) = mx}$$

**Exemple**

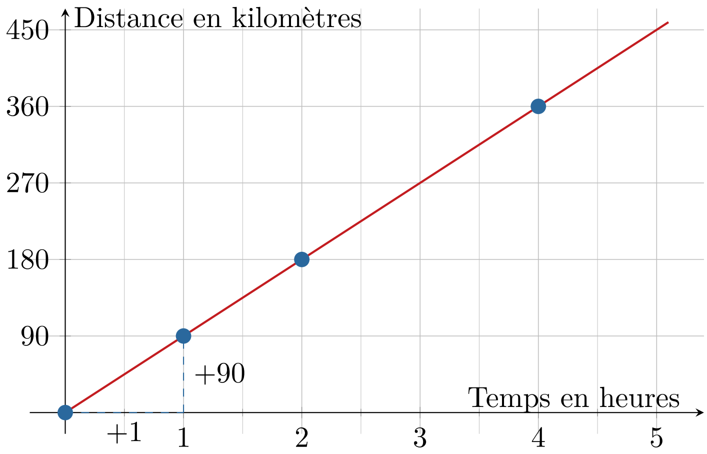
Une voiture roule à la vitesse constante de 90 km/h.
On note $d(t)$ la distance parcourue, en kilomètres, pendant une durée $t$, en heures.

| $t$ (en h) | 0 | 1 | 1,5 | 2 | 4 | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $d(t)$ (en km) | 0 | 90 | 135 | 180 | 360 | $90t$ |

La distance est proportionnelle à la durée.
On a donc :

$$\boxed{d(t) = 90t}$$

La fonction $d$ est une fonction linéaire de coefficient 90.




## 5) Modéliser des pourcentages par des fonctions linéaires

**Propriété**

Soit $t$ un nombre positif.
Calculer $t\,\%$ d'une quantité revient à multiplier cette quantité par :

$$\boxed{\frac{t}{100}}$$

**Exemple**

Un gâteau au chocolat de 160 g comporte 53 % de glucides.
La quantité de glucides est égale à :

$$160 \times \frac{53}{100}$$

$$160 \times 0{,}53 = 84{,}8$$

Le gâteau comporte donc :

$$\boxed{84{,}8 \text{ g de glucides}}$$

**Propriétés**

Soit $t$ un nombre positif.
Augmenter une quantité de $t\,\%$ revient à la multiplier par :

$$\boxed{1 + \frac{t}{100}}$$

Diminuer une quantité de $t\,\%$ revient à la multiplier par :

$$\boxed{1 - \frac{t}{100}}$$

**Remarque**

Le nombre :

$$1 + \frac{t}{100}$$

ou :

$$1 - \frac{t}{100}$$

est appelé le **coefficient multiplicateur**.

**Exemple**

En 2022, une société avait un chiffre d'affaires de 138 000 euros.
Ce chiffre d'affaires a diminué de 18 % en 2023, puis augmenté de 5 % en 2024.
Après la diminution de 18 % :

$$138\,000 \times \left(1 - \frac{18}{100}\right)$$

$$138\,000 \times 0{,}82 = 113\,160$$

Après l'augmentation de 5 % :

$$113\,160 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right)$$

$$113\,160 \times 1{,}05 = 118\,818$$

Le chiffre d'affaires en 2024 était donc de :

$$\boxed{118\,818 \text{ euros}}$$

**Propriété**

Prendre un pourcentage d'une quantité, augmenter une quantité d'un pourcentage ou diminuer une quantité d'un pourcentage sont des situations de proportionnalité.
Elles peuvent donc être modélisées par des fonctions linéaires.

**Exemple**

Pour une quantité initiale notée $x$ :

| **Situation** | Prendre 5 % de x | Augmenter x de 5 % | Diminuer x de 5 % |
|---|---|---|---|
| **Fonction** | f(x)=0,05x | g(x)=1,05x | h(x)=0,95x |